Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

TD n°6 : Méthodes perturbatives

1 Méthode des échelles multiples : introduction

On considère un oscillateur harmonique faiblement amorti, d'équation (adimensionnée) du mouvement :

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

avec $\varepsilon \ll 1$.

1. Donner les deux échelles de temps caractéristiques du problème, et justifier qu'on peut considérer une séparation d'échelle entre une échelle de temps lente et une échelle de temps rapide.

2. Dans un premier temps, on va effectuer un développement naïf. On pose $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ...$. Résoudre le problème à l'ordre 0 puis à l'ordre 1 en ε. Montrer que la solution approchée obtenue n'est pas une solution physiquement acceptable.

3. On utilise donc une autre méthode de développement, appelée *méthode des échelles multiples*.
On pose :

$$x(t) = x_0(t, T_1, T_2, ...) + \varepsilon x_1(t, T_1, T_2, ...) + \varepsilon^2 x_2(t, T_1, T_2, ...) + ... \tag{2}$$

avec $T_i = \varepsilon^i t$ et où les x_i et leurs dérivées par rapport aux T_j sont supposés être d'ordre 0 en ε.

(a) Écrire les dérivées $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ à l'ordre 2 en ε.

(b) Montrer qu'à l'ordre 0 la solution de l'équation 1 s'écrit :

$$x_0(t, T_1, T_2, ...) = A(T_1, T_2, ...)e^{i\omega t} + c.c. \tag{3}$$

(c) Écrire l'équation en ne gardant que les termes à l'ordre 1 en ε. Montrer que le fait de garder des termes résonants, à la pulsation ω, conduit à des termes séculaires dans x_1, de la forme $te^{i\omega t}$. En déduire que le développement ne reste valide que par un choix de A qui annule les termes résonants : cette condition nécessaire à la validité du développement s'appelle la *condition de solvabilité*. Écrire cette condition et en déduire la dépendance de A en T_1. À quel effet physique cette dépendance de A en T_1 correspond-elle ?

(d) Montrer alors que :

$$x_1(t, T_1, T_2, ...) = B(T_1, T_2, ...)e^{i\omega t} + c.c. \tag{4}$$

B modifie juste le coefficient devant $e^{i\omega t}$ dans la solution globale, et on peut alors prendre $B = 0$ dans la suite.

(e) Écrire l'équation en ne gardant que les termes à l'ordre 2 en ε. Calculer la condition de solvabilité, et en déduire que

$$A(T_1, T_2, ...) = \tilde{A}(T_3, ...)e^{-\frac{T_1}{2}} e^{-i\frac{T_2}{8\omega}} \tag{5}$$

À quel effet physique la dépendance de A en T_2 correspond-elle ?

(f) Écrire la solution approchée en fonction de t uniquement, et la comparer à la solution exacte.

2 Oscillateur de Van der Pol-Duffing

L'oscillateur de Van der Pol-Duffing est décrit par l'équation suivante (où le terme d'amortissement non linéaire $x^2\dot{x}$ est dû à Van der Pol, et le terme d'anharmonicité $-dx^3$ à Duffing) :

$$\ddot{x} + (-f + x^2)\dot{x} + (x - dx^3) = 0 \tag{6}$$

On se place au voisinage du point fixe $x = 0$ et on pose

$$f = \varepsilon F \tag{7}$$

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon}(x_0(t,T) + \varepsilon x_1(t,T)) \tag{8}$$

$$T = \varepsilon t \tag{9}$$

avec $\varepsilon \ll 1$, d, F, x_0, x_1 et leurs dérivées étant O(1).

1. Écrire l'équation (6) à l'ordre $\varepsilon^{1/2}$. En déduire que la solution à l'ordre $\varepsilon^{1/2}$ peut s'écrire sous la forme $x_0(t,T) = A(T)e^{it} + c.c.$

2. Calculer la condition de solvabilité du problème à l'ordre $\varepsilon^{3/2}$ en éliminant les termes résonants. Identifier le rôle des différents termes dans l'équation obtenue pour $A(T)$.

3. Montrer que l'invariance de l'équation 6 par la transformation $t \to t + t_0$ pour tout t_0 entraine que la condition de solvabilité doit être invariante par changement de phase $A \to A\,e^{i\phi}$. En déduire que les seuls monômes qui peuvent être retenus dans l'équation d'amplitude sont ceux en A et en $A^2\bar{A}$.

4. On peut écrire $A(T)$ sous la forme $A(T) = r(T)e^{i\theta(T)}$. En déduire les équations vérifiées par r et θ.