Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

TD n°5 : Formulation hamiltonienne

1 Formulation hamiltonienne

1. Rappeler en quoi consiste la formulation hamiltonienne. Citez quelques-uns de ses avantages.

2. Calculer le hamiltonien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Écrire les équations d'Hamilton correspondantes.

3. Une transformation est dite *canonique* lorsqu'elle laisse les équations du mouvement invariantes. Montrer qu'une transformation $(p,q) \to (P,Q)$ est canonique si et seulement si $\{P,Q\}_{p,q} = 1$. Proposer une généralisation pour N couples de coordonnées (q_i, p_i).

2 Opérateurs création et annihilation

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de pulsation ω. Soient les transformations linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \dfrac{1}{m\omega}(m\omega\alpha q + \beta p), \\ P = m\gamma\omega q + \delta p. \end{array} \right. \tag{1}$$

1. Donner le hamiltonien d'un oscillateur harmonique.

2. À quelle condition ces transformations sont-elles canoniques ?

3. Établir que l'identité $(Q = q, P = p)$, la permutation $(Q = p, P = -q)$ et la dilatation $(Q = \sqrt{m\omega}q, P = p/\sqrt{m\omega})$ sont des transformations canoniques. Quels sont les portraits de phase de l'oscillateur dans les différents systèmes de coordonnées.

4. On cherche à présent les transformations canoniques linéaires qui permettent de réécrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q} = \lambda Q, \\ \dot{P} = \lambda^* P. \end{array} \right. \tag{2}$$

Quel est l'avantage de ce type de transformations ? Quel est le nouveau hamiltonien $H'(Q,P)$? Vérifier que λ est nécessairement imaginaire pur.

5. Quelles sont les transformations canoniques associées ?

6. Obtenir l'évolution de $q(t)$.

3 Particule dans un champ magnétique (2)

On considère une particule dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$. En utilisant la jauge symétrique pour le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{r}/2$ dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ constant, résolvez le problème en choisissant une transformation canonique adéquate. Tracer les trajectoires en les nouvelles variables et les anciennes.

4 Théorème de Larmor

Soient $\mathscr{R}$ un référentiel galiléen et $\mathscr{R}'$ un référentiel en rotation par rapport à $\mathscr{R}$ suivant le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}(t)$. On considère tout d'abord une particule de masse m soumise à un potentiel $V(\boldsymbol{r})$.

1. Exprimer le lagrangien du système dans le référentiel $\mathscr{R}'$.

2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange dans ce même référentiel. Commenter.
3. On s'intéresse à présent à une particule de masse m et de charge q, soumise à un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}(t)$ en plus du potentiel $V(\boldsymbol{r})$. Que peut-on choisir comme potentiel vecteur $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$? Écrire le lagrangien de ce nouveau problème.
4. Montrer que, dans la limite des champs magnétiques uniformes faibles, le mouvement de la particule est équivalent à celui que l'on observerait, en l'absence de champ magnétique, dans un référentiel en rotation à une vitesse $\boldsymbol{\Omega}_L(t)$ que l'on précisera. Ceci constitue le théorème de Larmor.
5. Retrouver le mouvement cyclotron pour $V(\boldsymbol{r}) = 0$ et $\dot{\boldsymbol{B}}(t) = \boldsymbol{0}$. Comparer la fréquence cyclotron et la fréquence de Larmor.

5 Opérateur évolution

On considère un problème unidimensionnel constitué d'une particule de masse m dans un potentiel $V(x) = k/x^2$. On cherche à résoudre ce problème d'un façon algébrique (sans résoudre d'équation différentielle).

1. **Première méthode :** Montrer que H et $C = px - 2Ht$ sont des constantes du mouvement. En déduire une expression de $x^2(t)$ en fonction des conditions initiales x_0 et p_0. L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut trouver suffisamment de constantes du mouvement. Cela peut être une tâche compliquée, et très dépendante du problème considéré.
2. **Deuxième méthode :** Cette méthode va permettre de trouver la solution du problème de façon complètement générale. On considère un système en évolution hamiltonienne, avec un hamiltonien indépendant du temps. On appelle *liouvillien* l'opérateur $\mathscr{L} = \{\,\cdot\,, H\}$.
   (a) Soit une fonction $f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ de l'espace des phases. En faisant un développement en t, exprimer formellement l'évolution de f en fonction de ses crochets de Poisson successifs avec le hamiltonien exprimés au temps initial $t_0 = 0$. En déduire que :
   $$f(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)) = [e^{t\mathscr{L}} f](\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_0), \tag{3}$$
   où l'on définira l'exponentielle d'opérateur par analogie avec l'exponentielle de matrice.Connaissez-vous l'équivalent quantique de l'équation (**??**) ?
   (b) Calculer l'évolution de $x^2(t)$ par cette méthode des crochets de Poisson.

6 Forces tournantes

On appelle « force tournante » une force dont le rotationnel est non nul. On s'intéresse particulièrement aux forces tournantes le plan xOy, pouvant se représenter par un hamiltonien.

1. Montrer que la force qui dérive d'un hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + U(\boldsymbol{r})$ est toujours de rotationnel nul.
2. Pour cette raison, on considère des hamiltoniens plus généraux :
   $$H = \frac{1}{2}\alpha p_x^2 + \beta p_x p_y + \frac{1}{2}\gamma p_y^2 + U(x,y). \tag{4}$$
   Écrire les équations de Hamilton correspondantes. En déduire des conditions pour que la force correspondante ait un rotationnel nul.
3. Dans le cas d'un mouvement périodique, on a nécessairement
   $$\oint \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\mathrm{d}s = 0. \tag{5}$$
   Commenter physiquement cette relation. La relier au rotationnel de la force du problème, et en déduire les trajectoires périodiques possibles pour un système de force à rotationnel non nul.
4. Une force tournante est-elle dissipative ? conservative ?

Réf : Berry & Shukla, *Hamiltonian curl forces*, Proc. R. Soc. A **471** (2015)