Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

TD4 : Théorie classique des champs

1 Principe de moindre action

Souvent, on doit s'intéresser un un exemple de variables $q_i(t)$, réparties de façon continue dans l'espace ; pour cette raison, on introduit la théorie lagrangienne des champs. On se place dans un espace à d dimensions spatiales, et on note $x = (x^0 = ct, x^1, \ldots, x^d)$ le vecteur des coordonnées généralisées qui appartient à un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^{d+1}$. On suppose que la valeur des champs au bord du domaine Ω est fixée (conditions de Dirichlet). Soit un champ scalaire $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. On définit l'action S comme une fonctionnelle du champ φ,

$$S[\varphi] = \int_\Omega \mathscr{L}(x^\mu, \varphi(x^\mu), \partial_\nu \varphi(x^\mu)) \mathrm{d}^{d+1} x^\mu, \tag{1}$$

où $\mathscr{L}$ est la *densité lagrangienne* du système.

1. Quel est le lien entre le lagrangien L et la densité lagrangienne $\mathscr{L}$?

2. Montrer que si le champ φ rend l'action extrémale, alors il vérifie l'équation

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} = 0, \tag{2}$$

en utilisant la convention d'Einstein de sommation des indices répétés. On définit également la densité d'impulsion conjuguée

$$\Pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}.$$

3. En déduire une expression de la densité hamiltonienne.

2 Équation de Sine-Gordon

On considère une chaîne infinie de pendules de masse m, de longueur ℓ. Chaque pendule est élastiquement lié à son voisin par un ressort qui impose un couple de torsion de raideur C, lorsque les pendules sont écartés l'un de l'autre dans un plan normal à l'axe du ressort.

1. Écrire le lagrangien du système.

2. En déduire les équations du mouvement pour chaque pendule.

3. On pose $\theta_i(t) = \theta(x = ia, t)$, où a est la distance entre deux pendules consécutifs. On s'intéresse à la limite $a \to 0$ avec m/a et Ca constants. Montrer que le lagrangien s'écrit alors $L = \int \mathscr{L}(\theta(x), \partial_\mu \theta(x)) \mathrm{d}x$, avec

$$\mathscr{L}(\theta(x), \partial_\mu \theta(x)) = \frac{I}{a} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_t \theta)^2 - \frac{c_0^2}{2}(\partial_x \theta)^2 - \omega_0^2 (1 - \cos\theta) \right\}, \tag{3}$$

où c_0 et ω_0 sont des constantes à déterminer.

4. Écrire la densité hamiltonienne correspondante. Interpréter.

5. Montrer que l'équation du mouvement vérifiée par le champ scalaire $\theta(x,t)$ est l'équation de Sine-Gordon :

$$\partial_{tt}^2 \theta - c_0^2 \partial_{xx}^2 \theta + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \tag{4}$$

6. Commenter cette équation puis la linéariser pour obtenir l'équation de Klein-Gordon. Obtenir la relation de dispersion des ondes planes et la représenter graphiquement. Que devient la vitesse de phase aux faibles longueurs d'ondes ? Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_0$?

3 Théorème de Noether (simplifié)

Émilie Noether démontra au début du XX$^{\text{e}}$ un puissant théorème reliant les symétries continues des équations du mouvement à une intégrale première du mouvement ; on démontre ici une version simplifiée. Il généralise par exemple le lien entre l'indépendance du lagrangien de la variable t et la conservation de l'énergie.

1. Donner des exemples de symétries continues.

2. Soit une densité lagrangienne $\mathscr{L}(x^\mu, \varphi(x^\mu), \partial_\nu\varphi(x^\mu))$. On considère une transformation continue du champ φ dont la version infinitésimale s'écrit

$$\varphi(x^\mu) \to \varphi(x^\mu) + \alpha\Delta\varphi \tag{5}$$

avec $\alpha \ll 1$ (développement limité en α). La densité lagrangienne se transforme de la même façon :

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\Delta\mathscr{L}, \tag{6}$$

et on suppose que celle-ci est invariante par cette transformation, c'est-à-dire que $\Delta\mathscr{L} = 0$. Écrire la variation de la densité lagrangienne selon cette transformation, et en déduire qu'il existe un vecteur courant j^μ tel que $\partial_\mu j^\mu = 0$.

3. Reformuler cette équation sous la forme d'une équation de conservation.

4 Champs scalaires et complexes

1. Champ scalaire : Soit un champ $\varphi(x^\mu)$. On regarde la densité lagrangienne

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{c^2}{2}(\partial_i\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{7}$$

où on utilise la sommation d'Einstein ($1 \leq i \leq 3$).

(a) Trouver les équations du mouvement correspondantes.

(b) Donner un exemple d'une telle théorie pour $g = 0$ et $m = 0$. Trouver les symétries continues du problème et en déduire les quantités conservées.

(b) Même question pour $g = 0$ et $m \neq 0$.

(c) À quoi le terme en g peut-il correspondre ?

2. Champ complexe : On considère maintenant un champ complexe $\psi(x^\mu)$. On traite comme deux champs indépendants ψ et $\overline{\psi}$ son complexe conjugué, et on considère la densité lagrangienne

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}|\partial_0\psi|^2 - \frac{1}{2}|\partial_i\psi|^2 - \frac{m^2}{2}|\psi|^2 \tag{8}$$

(a) Trouver les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

(b) Trouver une nouvelle symétrie continue. En déduire le vecteur courant j^μ correspondant, ainsi que la quantité conservée. Donner une théorie où cette grandeur est conservée.