MÉCANIQUE ANALYTIQUE

FIP
2018-2019

Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

TD 2: Lagrangiens et constantes du mouvement

1 Lagrangien d'une particule libre

À l'aide des symétries générales de l'espace, déduire des contraintes sur le lagrangien d'une particule libre.

2 Particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère une particule de charge q et de masse m dans un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$.

1. On rappelle que le potentiel-vecteur est défini par $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$. Trouver l'expression des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en fonction des potentiels V et $\overrightarrow{A}$.

2. Rappeler l'expression du lagrangien L d'un tel système. Écrire les équations d'Euler-Lagrange et retrouver la force de Lorentz exercée sur la particule.

3. Expliciter la quantité $H(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$, appelée *hamiltonien* du système, où $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est appelée *impulsion conjuguée* de q_i. Que remarquez-vous au sujet de l'impulsion ?

4. Si $\overrightarrow{A}$ est un potentiel-vecteur admissible, montrer que $\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$ où f est une fonction réelle quelconque est également admissible. Avec une telle transformation, comment est modifié le potentiel scalaire ?

5. Une transformation comme décrite dans la question précédente s'appelle une *transformation de jauge*. Quel est l'effet d'un changement de jauge sur le lagrangien ? sur les équations du mouvement ?

3 Problème à deux corps et mouvement à force centrale

On s'intéresse au mouvement de deux particules ponctuelles M_i, de positions $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{OM_i}$, de masses m_i $(i = 1,2)$, interagissant entre elles par une force centrale (gravitation, électromagnétisme, etc.).

1. Écrire le lagrangien d'un tel système.

2. Déduire une intégrale première du mouvement liée à l'invariance par translation dans le temps du système.

3. Idem avec l'invariance par translation dans l'espace.

4. Proposer un changement de variables $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \to (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{R})$ qui simplifie le lagrangien en utilisant le résultat précédent.

5. En utilisant les coordonnées sphériques pour $\overrightarrow{r}$, trouver une nouvelle intégrale du mouvement liée à une coordonnée cyclique. Quelles conclusions en tirer ?

4 Théorème de Noether

Le lien entre invariance du lagrangien et constante du mouvement remarqué précédemment découle en réalité d'une suite de théorèmes plus généraux dus à Emmy Noether au début du XXe siècle.

Soit un lagrangien $L(t,q,\dot{q})$, on considère une coordonnée $Q(s)$ dépendant *continûment* d'un paramètre s tel que $Q(0) = q$, et qui laisse le lagrangien invariant pour s proche de 0.

1. Quel est le changement $Q(s)$ associé à une invariance par translation spatiale ?

2. Calculer $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}$.

3. Montrer que $I(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}$ est une constante du mouvement.