# Correction Examen 2018

# Mécanique analytique

A. RAOUX.

## Exercice 1 : Chute libre

1) l'énergie potentielle vaut $E_p = mgz$, or $L = T - V$ :

$$L(t, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$$

Par définition,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

d'où

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \dot{z}p - L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

Dans les variables naturelles de $H$

$$H(z,p) = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

2) On cherche une transformation $(z,p) \to (Z,P)$ canonique, c'est-à-dire telle que

$$\{Z,P\}_{z,p} = 1 = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{p}{m} - \frac{\partial Z}{\partial p} mg.$$

On peut choisir $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ par exemple, soit $Z(z,p) = Z(p)$, et alors $\frac{\partial Z}{\partial p} = -\frac{1}{mg}$. Ainsi

$$Z(z,p) = -\frac{p}{mg}$$

3) Le nouveau hamiltonien s'écrit

$$H'(Z,P) = P$$

La transformation étant canonique, on peut écrire les équations de Hamilton dans les nouvelles variables :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = 0 \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \text{cste}. \\ Z = Z_0 + t \end{cases} \qquad (t_0 = 0)$$

Soit en revenant dans les anciennes variables :

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz = \text{cste} \qquad \text{(attendu puisque } L(\cancel{t}, \dot{z}, z))$$

et

$$p = p_0 - mgt$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{z}_0 - gt \\ z(t) &= -\tfrac{1}{2}gt^2 + \underset{v_0}{\dot{z}_0} t + \underbrace{z_0}_{=0} = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t. \end{aligned}$$

---

## Exercice 2 : Vibrations d'une lame mince.

4) $$E_c = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} \mu \delta \dot{q}_i^2$$

5) Le cercle tangent a trois inconnues : les coordonnées du centre $O_i(x_0, z_0)$ et la valeur de $R_i$. On a trois équations (des points sur le cercle) :

$$\begin{cases} (-\delta - x_0)^2 + (q_{i-1} - z_0)^2 = R_i^2 & (1) \\ (0 - x_0)^2 + (q_i - z_0)^2 = R_i^2 & (2) \\ (\delta - x_0)^2 + (q_{i+1} - z_0)^2 = R_i^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) - 2\times(2) : \delta^2 + \cancel{2\delta x_0} + \cancel{x_0^2} + \delta^2 - \cancel{2\delta x_0} + \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0^2}$$
$$+ q_{i-1}^2 - 2z_0 q_{i-1} + \cancel{z_0^2} + q_{i+1}^2 - 2z_0 q_{i+1} + \cancel{z_0^2} - 2q_i^2 + 4q_i z_0 - \cancel{2z_0^2} = 0$$

D'où

$$\underbrace{q_{i-1}^2 + q_{i+1}^2 - 2q_i^2}_{\text{négligés devant les } q_i} - 2z_0(q_{i-1} + q_{i+1} - 2q_i) = -2\delta^2$$

et petites déformations $\Rightarrow$ grand $R_i$, en particulier $R_i \gg q_i$. Ainsi :

$$z_0 = R_i - q_i \simeq R_i$$

Finalement

$$\frac{1}{R_i} = \frac{|2q_i - q_{i-1} - q_{i+1}|}{\delta^2}$$

(On prend la valeur absolue pour avoir $R_i > 0$)

6) On peut associer à chaque segment une énergie potentielle

$$E_{p_i} = \delta \times \frac{EI}{2R_i^2} = \delta \frac{EI}{2} \frac{(2q_i - q_{i-1} - q_{i+1})^2}{\delta^4}$$

Donc le potentiel total s'écrit $V = \sum_i E_{p_i}$

pas de facteur 1/2 pour ne pas compter deux fois chaque énergie.

puisque $E_{p_i}$ est l'énergie de chaque segment $\delta$

Ainsi

$$\left\| \; L(\{q_i, \dot{q}_i\}) = \sum_i \left[ \frac{\mu\delta}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{\delta EI}{2} \frac{(2q_i - q_{i-1} - q_{i+1})^2}{\delta^4} \right] \right.$$

7) Pour déduire les équations de Lagrange par rapport à $q_j$, on fait attention que trois termes contribuent dans $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ : $i = j, j-1$ et $j+1$.

Ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 = \mu\delta\ddot{q}_j + \frac{\delta EI}{\delta^4}\Big(2\overbrace{(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1})}^{j=i} - \overbrace{(2q_{j+1} - q_j - q_{j+2})}^{j=i-1} - \underbrace{(2q_{j-1} - q_{j-2} - q_j)}_{j=i+1}\Big)$$

$$\left\| \; \mu\delta\ddot{q}_j + \frac{EI}{\delta^3}\left(+q_{j+2} - 4q_{j+1} + 6q_j - 4q_{j-1} + q_{j-2}\right) = 0 \right. .$$

## Modèle continu.

8) On remarque que $\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\delta^2}$ est une dérivée seconde discrète.

En effet :

$$\left.\begin{aligned} q(x+\delta, t) &= q(x,t) + \delta \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\ q(x-\delta, t) &= q(x,t) - \delta\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \\ q(x,t) &= q(x,t) \end{aligned}\right\} \quad \frac{q(x+\delta,t) + q(x-\delta,t) - 2q(x,t)}{\delta^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x,t).$$

D'où $L(q, \partial_t q, \partial_x q, \partial_x^2 q) = \sum \delta \left( \frac{\mu}{2}(\partial_t q)^2 - \frac{EI}{2}(\partial_x^2 q)^2 \right)$

On remplace $\sum \delta \times (\dots)$ par $\int dx\, (\dots)$.

Ainsi

$$\left\| \; L = \int \underbrace{\left[ \frac{\mu}{2}(\partial_t q)^2 - \frac{EI}{2}(\partial_x^2 q)^2 \right]}_{\mathcal{L}(q,\, \partial_t q,\, \partial_x q,\, \partial_x^2 q)} dx . \right.$$

9) De façon générale, on peut écrire l'action d'un problème continu (à une dimension) comme

$$S = \int \mathcal{L} \, dx \, dt$$

avec $\mathcal{L}$ une densité de lagrangien. Supposons que $\mathcal{L}(\partial_t q, \partial_x q, \partial_x^2 q)$, et cherchons à extrémiser $S$ :

$$\delta S = 0 = \int \delta\mathcal{L} \, dt\, dx = \int \left[ \delta q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \delta \partial_t q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} + \delta \partial_x q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} + \delta \partial_x^2 q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^2 q)} \right] dt\, dx.$$

$$= \int \delta q \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} + \partial_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^2 q)} \right] dt\, dx.$$

où on a utilisé des intégrations par parties pour retrouver $\delta q$.
L'équation de Lagrange continue s'écrit donc :

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} \underbrace{- \partial_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^2 q)}}_{\text{terme nouveau.}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$$

10) Dans le problème considéré, on a

$$\partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} \right) = \mu \partial_t^2 q \quad ; \quad \partial_x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} \right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad ; \quad \partial_x^2 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^2 q)} \right) = EI \, \partial_x^4 q$$

Ainsi

$$\partial_t^2 q + \frac{EI}{\mu} \partial_x^4 q = 0$$

11) L'équation donne la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \frac{EI}{\mu} k^4 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{EI}{\mu}} k^2 \quad \text{relation dispersive.}$$

12) On veut $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et $\omega^2 \frac{\mu \ell^4}{EI} \sim 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{EI}{\mu \ell^4}}$.

Or $\mu = \frac{M}{\ell} = \frac{\rho \ell b e}{\ell} = \rho b e$ où $b$ est la largeur de la lame. De plus

$$I = \frac{s e^3}{12} = \frac{b e^4}{12}.$$

Ainsi

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E b e^4}{12 \rho b e \ell^4}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2.10^{11} . (10^{-3})^3}{12 . 8 \times 10^3 \times (0,1)^4}} \simeq \text{Hz}.$$

13) L'étudiant excite les modes propres de la règle, qui sont dans l'audible grave (pour 20 cm, $f > 20$ Hz). Puis il raccourcit la longueur de la règle pouvant résonner, d'où $\ell \downarrow$ et $f \uparrow$. On entend ainsi des fréquences croissantes..