MÉCANIQUE ANALYTIQUE

FIP
2018-2019

Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

Examen du 19 novembre 2018

Merci de traiter les deux parties **sur des copies séparées**. De nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment.

Partie 1

Exercice 1: Chute libre

Soit une particule de masse m dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Celle-ci est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ depuis le sol situé à $z = 0$.

1. Écrire le lagrangien $L(t,z,\dot{z})$ du problème. Donner l'expression de l'impulsion p conjuguée à z, et en déduire l'expression du hamiltonien $H(z,p)$.

2. On pose $P = H(z,p)$. Proposer une fonction $Z(z,p)$ telle que la transformation $(z,p) \to (Z,P)$ est une transformation canonique.

3. Écrire les équations de Hamilton associées, trouver l'expression de $Z(t)$ et $P(t)$, puis exprimer $z(t)$.

Exercice 2: Vibrations d'une lame mince

Soit une lame mince uniforme, homogène de masse linéique μ, de longueur ℓ, initialement au repos horizontalement. On étudie les vibrations de cette lame si celle-ci est déformée (on négligera l'influence du poids).

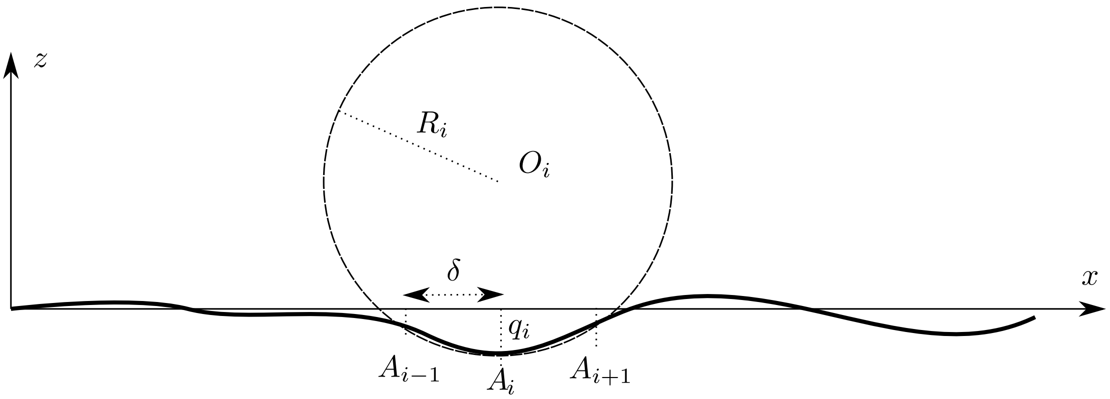

Figure 1: Modèle discret de la déformation d'une lame. Le cercle de centre O_i et de rayon R_i passe par les points A_i, A_{i-1}, A_{i+1}. q_i est la déviation verticale de A_i par rapport à sa position d'équilibre. Dans le cadre de petites déformations, on a $q_i \ll R_i$.

Modèle discret On découpe la tige en N segments de longueur δ. Le mouvement de la lame est supposé vertical. Pour chaque segment, soit A_i son centre de gravité, on pose q_i l'écart vertical de A_i par rapport à sa position d'équilibre. On se place dans le cas de petites déformations, δ étant aussi approximativement la longueur de la projection selon x du segment $[A_iA_{i+1}]$.

4. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la lame.

5. Montrer que le rayon de courbure local R_i est donné par

$$\frac{1}{R_i} = \frac{|2q_i - q_{i-1} - q_{i+1}|}{\delta^2}. \tag{1}$$

On utilisera que le rayon de courbure R_i est le rayon du cercle passant par A_i, A_{i-1} et A_{i+1}. On rappelle l'équation d'un cercle de centre O de coordonnées (X_O, Z_O) et de rayon R: $(x - X_O)^2 + (z - Z_O)^2 = R^2$. On négligera les termes en q^2 devant les termes en q.

6. L'énergie potentielle linéique associée à une déformation locale d'une lame s'écrit $EI/(2R^2)$ où E est le module d'Young, $I = se^2/12$ avec e l'épaisseur, s la section transverse, et R le rayon de courbure local. En déduire l'expression du lagrangien $L(\{q_i, \dot{q}_i\}_{1\leq i\leq N})$ du problème.

7. Écrire les équations de Lagrange associées.

Modèle continu On définit une fonction lisse $q(t,x)$ qui vérifie $q(x = i\delta, t) = q_i(t)$. pour tout i.

8. En faisant tendre δ vers 0, montrer que le lagrangien précédent que s'écrire sous la forme

$$L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}x \tag{2}$$

où $\mathscr{L}$ est une fonctionnelle qui dépend des dérivées temporelles et spatiales de $q(x,t)$.

9. Contrairement aux exemples traités dans le cours, $\mathscr{L}$ dépend de la dérivée spatiale seconde de $q(x,t)$. Reprendre le calcul du cours permettant de trouver les équations de Lagrange relatives aux densités lagrangiennes, et le généraliser pour une densité dépendant de $\partial_x^2 q$.

10. En déduire l'équation de Lagrange du problème

$$\partial_t^2 q(x,t) + \frac{EI}{\mu}\partial_x^4 q(x,t) = 0 \tag{3}$$

11. Exprimer la relation de dispersion liant la pulsation ω et le vecteur d'onde k pour une onde $q(x,t) = q_0 e^{i(\omega t - kx)}$.

12. Les conditions aux limites imposent $\omega^2 \mu \ell^4/(EI) \sim 1$. En déduire la fréquence de résonance d'un réglet en acier ($E = 2\times 10^{11}$ Pa, masse volumique $\rho = 8\times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) de 10 cm, d'épaisseur 1 mm.

13. Expliquer le bruit obtenu lorsqu'un étudiant fait osciller sa règle en fer sur le bord de la table, tout en déplaçant la main tenant l'extrémité du réglet vers l'intérieur de la table.

Partie 2

Exercice 3: Mouvement d'une particule dans une parabole en rotation

On s'intéresse au mouvement d'une particule de masse m se déplaçant sans frottement le long d'une parabole d'équation $z = x^2/2a$ tournant autour de l'axe z à vitesse angulaire Ω.

14. Donner l'expression du lagrangien du système en fonction de m, g, Ω, x, z, $\dot{x}$ et $\dot{z}$.

15. Donner l'expression du lagrangien du système après avoir éliminé z et $\dot{z}$. On notera $\lambda = (g/a) - \Omega^2$.

16. Donner l'expression de l'équation de Lagrange.

17. Mettre l'équation de Lagrange sous la forme d'un système du premier ordre en temps en notant $\dot{x} = y$ et donner l'expression de dy/dx en fonction de λ, x, y et a.

18. Donner l'expression du hamiltonien du système H en fonction de λ, x, y et a. Est-il constant? Pourquoi? En déduire une relation entre x^2 et y^2 faisant intervenir a, λ et une constante C.

19. En vous aidant des réponses aux deux questions précédentes, tracer les trajectoires dans l'espace des phases du système pour les 3 cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

20. Dans le cas $\lambda = 0$, montrer qu'il existe une infinité de solutions d'équilibre sur la droite $y = 0$. Expliquer physiquement pourquoi (à la différence du cas vu en cours relatif à une particule sur un cercle en rotation).

Exercice 4: Régulateur à boules

On considère un régulateur à boules (voir figure 2). Il est composé de 4 bras articulés de masse négligeable et de longueur ℓ. Les liaisons sont supposées sans frottement. L'ensemble est fixé au point O et tourne autour de l'axe vertical z à vitesse angulaire Ω. Celle-ci a tendance à écarter les deux masses M et ainsi à faire monter le point A guidé le long de l'axe vertical par un dispositif de masse m. La position du point A peut être utilisée pour contrôler le moteur (non représenté sur la figure) qui tourne à vitesse angulaire Ω et entraîne le régulateur à boules.

Nous considérons tout d'abord le dispositif de la figure 2 seul en rotation à vitesse angulaire Ω sans prendre en compte le moteur.

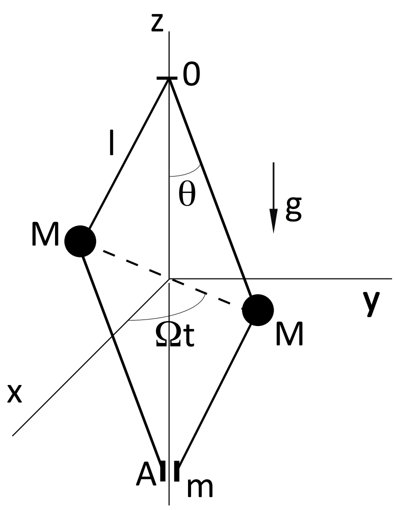

Figure 2: Régulateur à boules.

21. Donner les expressions des coordonnées des masses M et m et en déduire leurs vitesses.

22. En déduire l'expression du lagrangien du dispositif de la figure 2.

23. Donner l'expression de l'équation de Lagrange et l'interprétation physique des différents termes.

24. En particulier, discuter l'existence d'un terme impliquant $\dot{\theta}$. Ce terme correspond-il à une dissipation ou une amplification? D'où cela pourrait-il provenir?

On considère à présent l'effet de la position du point A sur la vitesse angulaire du moteur. On modélise cela par l'équation

$$J\dot{\Omega} = k\cos\theta - \Gamma, \tag{4}$$

où J est en première approximation le moment d'inertie du rotor du moteur, $k\cos\theta$ est le couple moteur (régulé par la position de A) et Γ le couple résistant (friction constante). On suppose $\Gamma < k$. On néglige m afin de simplifier les calculs qui suivent ($m = 0$).

25. On suppose que le dispositif de la figure 2 est soumis à une friction de type fluide de coefficient γ que l'on a négligée précédemment. Montrer que le système d'équations régissant le problème est

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \phi, & (5)\\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \Omega^2\cos\theta\,\sin\theta - \frac{g}{l}\sin\theta, & (6)\\ J\dot{\Omega} &= k\cos\theta - \Gamma. & (7) \end{aligned}$$

26. Donner l'expression des points fixes ou solutions d'équilibre de ce système. En particulier, montrer comment la vitesse angulaire d'équilibre $\Omega = \Omega_0$ et l'angle d'équilibre $\theta = \theta_0$ dépendent des constantes k, Γ, g, ℓ et discuter les résultats obtenus.

27. On considère la stabilité linéaire de la solutions d'équilibre trouvée précédemment en considérant des perturbations infinitésimales $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\Omega}$

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}, \qquad \phi = 0 + \tilde{\phi}, \qquad \Omega = \Omega_0 + \tilde{\Omega}. \tag{8}$$

28. Reportez ces expressions dans le système d'équations précédent en ne gardant que les termes linéaires en perturbation et en négligeant donc les termes d'ordre supérieur en $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\Omega}$.

29. Chercher des solutions sous la forme

$$\tilde{\theta} = Ae^{st}, \qquad \tilde{\phi} = Be^{st}, \qquad \tilde{\Omega} = Ce^{st} \tag{9}$$

et montrer qu'une condition nécessaire pour que le système linéaire d'équations algébriques obtenues possède des solutions non nulles est que son déterminant soit nul.

30. Montrer que l'équation obtenue est un polynôme d'ordre 3 en s qui ne possède pas de racine réelle positive, donc engendrant une instabilité (On pourra s'intéresser au signe de chacun des coefficients).

31. Une instabilité oscillante du système survient lorsque l'on a deux racines imaginaires conjuguées $s = \pm i\omega$. Pourquoi? Le polynôme d'ordre 3 peut alors s'écrire sous la forme $(s+\nu)(s^2+\omega^2) = 0$.

32. Montrer qu'il faut que le système soit suffisamment amorti (γ assez grand) pour que la solution d'équilibre à vitesse angulaire constante soit stable. Donner l'expression de la valeur minimale de γ.