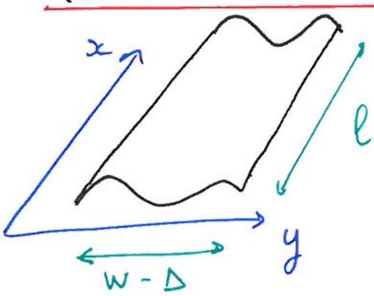
Examen mécanique analytique 2016.

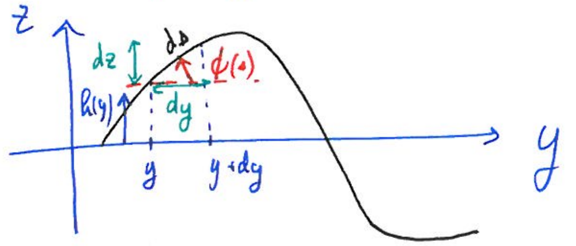
A. RAOUX

I / Formation de rides sous l'effet d'une compression.

1.1 Membrane sur un bain liquide.



1) Dans le plan yOz :



2) Une tranche de volume $dV = l\,dy\,dz$ a une énergie potentielle de pesanteur $dE_p = \rho\, dV\, z\, g$, d'où l'énergie potentielle totale

$$E_p = \int_A^B \left(\int_0^{h(y)} \rho g l z\, dz \right) dy = \int_A^B \rho g l \frac{h^2}{2}\, dy$$

Or d'après le schéma, $\cos\phi = \partial h / \partial s$, d'où

$$E_p = \frac{\rho g l}{2} \int_A^B h^2 \cos\phi\, ds = U_p \qquad \text{avec } K = \rho g.$$

3) • $[K] = [\rho g] = M.L^{-3}.L.T^{-2} = M.L^{-2}.T^{-2}$

• $[B] = \dfrac{[U_b]}{[l(\partial_s \phi)^2 ds]} = [U_b] = M.L^2.T^{-2}$ → énergie.

4) Par définition de la longueur et de l'abscisse curviligne, $W = \int_A^B ds$. Ici, on s'intéresse à la longueur projetée selon y.

Donc on veut
$$W - \Delta = \int_A^B dy = \int_A^B \cos\phi\, ds.$$

5) $\dot{h} = \partial_s h = \dfrac{dh}{ds} = \dfrac{dz}{ds} = \sin\phi$.

$Q(1)$ correspond à un multiplicateur de Lagrange (un pour chaque s)

6) On cherche à extrémiser l'énergie totale sous deux contraintes. 4/6

L'action s'écrit

$$S[h,\dot h,\phi,\dot\phi] = \int_A^B \frac{\dot\phi^2}{2}\,ds + \int_A^B \frac{h^2}{2}\cos\phi\,ds + \underbrace{\int_A^B Q(s)\,(\dot h - \sin\phi)\,ds}_{\text{Lagrange pour } \dot h = \sin\phi} + \underbrace{\lambda\left(W - \Delta - \int_A^B \cos\phi\,ds\right)}_{\text{contrainte sur la longueur totale.}}$$

Donc le lagrangien s'écrit

$$L[s,h,\dot h,\phi,\dot\phi] = \frac{\dot\phi^2}{2} + \frac{h^2}{2}\cos\phi - \lambda\cos\phi + Q(s)(\dot h - \sin\phi).$$

7) Par définition, la variable conjuguée à x est $\frac{\partial L}{\partial \dot x}$. Ici, les impulsions valent

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot h} = Q(s) \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \dot\phi$$

On en déduit le hamiltonien $H = \sum p_i \dot x_i - L$:

$$H[s,h,p_h,\phi,p_\phi] = \cancel{Q(s)\,\dot h} + \dot\phi^2 - \frac{\dot\phi^2}{2} - \frac{h^2}{2}\cos\phi + \lambda\cos\phi - Q(s)\,(\cancel{\dot h} - \sin\phi).$$

$$= \frac{\dot\phi^2}{2} - \frac{h^2}{2}\cos\phi + \lambda\cos\phi + Q(s)\sin\phi.$$

Dans ses variables naturelles :

$$H[s,h,p_h,\phi,p_\phi] = \frac{p_\phi^2}{2} - \frac{h^2}{2}\cos\phi + \lambda\cos\phi + p_h\sin\phi$$

8) Il y a deux équations de Hamilton par variable, d'où :

$$\dot p_h = -\frac{\partial H}{\partial h} = h\cos\phi \quad (1) \qquad \dot p_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{h^2}{2}\sin\phi + \lambda\sin\phi - p_h\cos\phi. \quad (3)$$

$$\dot h = \frac{\partial H}{\partial p_h} = \sin\phi \quad (2) \qquad \dot\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = p_\phi. \quad (4).$$

$$(3)+(4) : \quad \ddot\phi + \left(\frac{h^2}{2} - \lambda\right)\sin\phi = -p_h\cos\phi. \quad (*).$$

On peut se débarrasser de p_h en utilisant une constante du mouvement : comme $L[\cancel{s},\dots]$, H est une constante du mouvement : $H[s,h,\dot h,\phi,\dot\phi] = C$.

$$(*)\sin\phi : \quad \sin\phi\,\ddot\phi + \left(\frac{h^2}{2} - \lambda\right)\sin^2\phi = -p_h\cos\phi\sin\phi$$

$$= \left(\frac{p_\phi^2}{2} - \frac{h^2}{2}\cos\phi + \lambda\cos\phi - C\right)\cos\phi.$$

$$= \frac{\dot\phi^2}{2}\cos\phi - \left(\frac{h^2}{2} - \lambda\right)\cos^2\phi - C\cos\phi.$$

d'où

$$\ddot\phi\sin\phi + \left(\frac{h^2}{2} - \lambda\right) + \left(C - \frac{\dot\phi^2}{2}\right)\cos\phi = 0.$$

Enfin, en différenciant cette équation :

$$\dddot{\phi}\sin\phi + \ddot{\phi}\cancel{\dot{\phi}\cos\phi} + \dot{h}h + (\cancel{-\dot{\phi}\ddot{\phi}})\cos\phi + \left(C - \frac{\dot{\phi}^2}{2}\right)(-\dot{\phi}\sin\phi) = 0 .$$

d'où

$$\sin\phi\left(\dddot{\phi} + \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - C\right)\dot{\phi} + h\right) = 0 . \qquad (\dot{h} = \sin\phi) .$$

En identifiant avec l'énoncé, $P = -C$, provient de la conservation de H.

9) En dérivant une nouvelle fois,

$$\ddddot{\phi} + \dot{\phi}^2\ddot{\phi} + \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - C\right)\ddot{\phi} + \dot{h} = 0 .$$

ainsi

$$\ddddot{\phi} + \frac{3}{2}\ddot{\phi}\dot{\phi}^2 - C\ddot{\phi} + \sin\phi = 0 .$$

10) Pour l'intégrer, on multiplie par $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi}\ddddot{\phi} + \frac{3}{2}\ddot{\phi}\dot{\phi}^3 - C\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}\sin\phi = 0 .$$

ce qui donne après intégration :

$$\underbrace{\int\dot{\phi}\ddddot{\phi}} + \frac{3}{8}\dot{\phi}^4 - \frac{C}{2}\dot{\phi}^2 - \cos\phi + 1 = 0 . \qquad \left(\begin{matrix}\dot{\phi}(0) = 0 \\ \phi(0) = 0\end{matrix}\right).$$

$$= \left[\dot{\phi}\dddot{\phi}\right] - \int\ddot{\phi}\dddot{\phi} = -\frac{\ddot{\phi}^2}{2} + \dot{\phi}\dddot{\phi}$$

où on a fait une intégration par parties. Finalement

$$\dddot{\phi}\dot{\phi} - \frac{\ddot{\phi}^2}{2} + \left(\frac{3}{8}\dot{\phi}^2 - \frac{C}{2}\right)\dot{\phi}^2 + 1 - \cos\phi = 0 .$$

2.1 Effet à deux dimensions.

1)

$$\mathcal{U} = \underbrace{\frac{B}{2}\int_S (\partial_y^2 h)^2\, dS}_{\text{énergie de courbure "bending"}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_S f(x)(\partial_x h)^2\, dS}_{\text{énergie d'étirement selon } Ox} \underbrace{- \int_S h(x)\left[\frac{1}{2}(\partial_y h)^2 - \frac{\Delta(x)}{W}\right] dS}_{\text{condition d'inextensibilité}} .$$

$$[f(x)] = \frac{[U]}{[S]}$$: énergie surfacique = force linéique. ⇒ tension (de surface)

2) On a $\mathcal{U} = \int \mathcal{L}\, dx\, dy$, où

$$\mathcal{L}(x, y, \partial_x h, \partial_y h, h, \partial_y^2 h) = \frac{B}{2}(\partial_y^2 h)^2 + \frac{1}{2}f(x)(\partial_x h)^2 - h(x)\left(\frac{(\partial_y h)^2}{2} - \frac{\Delta(x)}{W}\right).$$

Les équations du cours ne sont plus valides puisque $\mathcal{L}$ dépend ici de $\partial_y^2 h$. 4/6

Si on extrémise U :

$$dU = 0 = \int \delta\mathcal{L}\, ds = \int \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h} \delta h + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_x h} \delta \partial_x h + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_y h} \delta \partial_y h + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_y^2 h} \delta \partial_y^2 h \right] ds .$$

$$\underset{IPP}{=} \int \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h} - \partial_x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_x h} - \partial_y \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_y h} + \partial_y^2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_y^2 h} \right] \delta h\, ds .$$

Ainsi, l'équation vérifiée par $\mathcal{L}$ pour que U soit extrémale est :

$$\partial_x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_x h} + \partial_y \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_y h} - \underbrace{\partial_y^2 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \partial_y^2 h}}_{\text{terme supplémentaire...}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h} = 0 .$$

3). L'équation précédente donne.

$$\partial_x \left(\partial_x h\, f(x) \right) + \partial_y \left(-b(x)\, \partial_y h \right) - \partial_y^2 \left(B\, \partial_y^2 h \right) - 0 = 0 .$$

soit

$$B\, \partial_y^4 h + b(x)\, \partial_y^2 h - f(x)\, \partial_x^2 h = 0 \qquad (*)$$

4) Vue la photo, on cherche à mettre en évidence un phénomène périodique selon Oy. D'où le développement en séries de Fourier selon cette variable. La fréquence spatiale fondamentale est $\frac{2\pi}{w}$.

Vue la figure, $X_n(0) = X_n(L) = 0$.

5). En injectant la solution proposée dans l'équation $(*)$:

$$\sum_n A_n \cos(k_n y + \phi_n) \left[k_n^4 X_n - f(x) X_n'' + b(x)(-k_n^2) X_n \right] = 0 .$$

Par liberté de la base, on obtient

$$f(x) X_n'' + \left(b(x)\, k_n^2 - k_n^4 \right) X_n = 0 \iff X_n''(x) + \omega_n^2 X_n = 0 .$$

6) Si b, f constantes, ω_n est constante. Donc

$$X_n(x) = B \sin(\omega_n x + \varphi) .$$

Or $X_n(0) = X_n(L) = 0$, ce qui impose

$$X_n(x) = B \sin(\omega_n x) \qquad \text{où} \qquad \omega_n = \frac{m\pi}{L}$$

La solution de plus basse énergie est $m = 1$.

d'où

$$\omega_n = \frac{\pi}{L}$$

7). On suppose que $h(x,y) = A\cos(ky+\phi)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

d'où

$$\int_0^W \left[\frac{(\partial_y h)^2}{2} - \frac{\Delta(x)}{W}\right] dy = 0 \iff \frac{1}{2}\int_0^W (\partial_y h)^2 dy = \Delta(x)$$

d'où

$$\Delta(x) = \frac{1}{2} A^2 k^2 \sin^2\frac{\pi x}{L} \underbrace{\int_0^W \cos^2\left(\frac{2\pi n}{W} y + \phi\right) dy}$$

$$= \int_0^{2\pi n} \cos^2(x+\phi) \frac{W}{2\pi n} dx = n \times 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{W}{2\pi n}.$$

$$= W/2$$

Ainsi

$$\Delta(x) = \frac{A^2 k^2}{4} \sin^2\frac{\pi x}{L} W.$$

Finalement, en moyenne sur x :

$$\langle \Delta(x) \rangle_L = \Delta = \frac{A^2 k^2}{4} W \left\langle \sin^2\frac{\pi x}{L}\right\rangle_L = \frac{A^2 k^2}{8} W.$$

comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on a

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 A^2}{2} \frac{W}{\Delta} \Rightarrow \boxed{\lambda \propto A}.$$

C'est un phénomène surprenant où la longueur d'onde λ est couplée à l'amplitude de la perturbation A !

8) • $$\frac{B}{2}\int_S (\partial_y^2 h)^2 dx\, dy = \frac{BA^2 k^4}{2} \underbrace{\int_0^W \cos^2\left(\frac{2\pi n y}{W} + \phi\right) dy}_{W/2} \underbrace{\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L} dx}_{L/2}.$$

$$= \frac{B A^2 k^4 W L}{8}$$

$$= B k^2 \Delta L$$

• $$\frac{1}{2}\int_S f(x) (\partial_x h)^2 dS = \frac{f}{2} \frac{\pi^2}{L^2} A^2 \underbrace{\int \cos^2\left(\frac{2\pi y n}{W} + \phi\right) dy}_{W/2} \underbrace{\int \sin^2\frac{\pi x}{L} dx}_{L/2}.$$

$$= \frac{f\pi^2 A^2 W L}{8L^2}$$

$$= \frac{\pi^2 f \Delta}{k^2 L}.$$

Finalement

$$U = B k^2 \Delta L + \frac{\pi^2 f \Delta}{k^2 L}.$$

9) Quelle est la longueur d'onde qui minimise $\mathcal{U}$? ou le k ? 6/6

$$\mathcal{U}(k) = B k^2 \Delta L + \frac{\pi^2 f \Delta}{k^2 L},$$

$$\frac{d\mathcal{U}}{dk} = 0 \iff \cancel{2} B k \cancel{\Delta} L = \frac{\cancel{2}\pi^2 f \cancel{\Delta}}{k^3 L} \iff \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 = \frac{B L^2}{\pi^2 f}.$$

Ainsi, $\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$