

I / Approche variationnelle du magnétisme

1.1 Spin isolé

1) Comme l'énoncé l'indique, il n'y a qu'un couple de variables conjuguées dans la description hamiltonienne, d'où

$$\begin{aligned}\{A, B\}_{q,p} &= \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial J \cos \theta} - \frac{\partial A}{\partial J \cos \theta} \frac{\partial B}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

$$\boxed{\{A, B\}_{q,p} = -\frac{1}{J \sin \theta} \{A, B\}_{\varphi, \theta}}$$

2) Calculons $\{J_x, J_y\}_{q,p}$ en utilisant la question précédente.

$$\begin{aligned}\{J_x, J_y\}_{q,p} &= -\frac{J^2}{J \sin \theta} \{ \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi \}_{\varphi, \theta} \\ &= -\frac{J}{\sin \theta} \left(-\sin \theta \sin \varphi \cos \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \cos \varphi \right) \\ &= J \cos \theta \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\{J_x, J_y\}_{q,p} = J_z}$$

- Les crochets de Poisson étant antisymétriques, on a $\boxed{\{J_x, J_x\}_{q,p} = 0}$.
- On montre de même que $\boxed{\{J_x, J_z\} = -J_y}$

Ces relations sont "classiques" en mécanique quantique : elles forment l'algèbre des moments cinétiques.

3) À cause de son moment cinétique \vec{J} , la particule possède un moment magnétique associé, $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ où γ est le rapport gyro-magnétique : $\gamma = \frac{q}{2m}$. ($\gamma < 0$ pour l'électron).

L'énergie d'un moment dans un champ magnétique s'écrit

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_i B_i = -\gamma J_i B_i$$

4) Cette énergie correspond à l'hamiltonien du problème, puisqu'on ne prend pas en compte l'énergie cinétique de la particule.

$$H = -\gamma J_i B_i$$

On l'évolution temporelle d'une grandeur est donnée, dans le formalisme hamiltonien par :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

Pour J_x :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= \{J_x, H\} = -\gamma \{J_x, J_i B_i\} \\ &= -\gamma (B_y J_z - B_z J_y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dJ_x}{dt} = \gamma (\vec{J} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_x}$$

5) On peut faire le même calcul pour J_y et J_z , on trouve l'équation générale

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma \vec{J} \wedge \vec{B}$$

C'est une équation typique de précession. En effet, si $\vec{B} = B \vec{u}_z$,

$$\begin{cases} \frac{dJ_x}{dt} = \gamma J_y B & (1) \\ \frac{dJ_y}{dt} = -\gamma J_x B \\ \frac{dJ_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow J_z = \text{cte.}$$

C'est un système différentiel à deux équations couplées. On peut les combiner en dérivant (1) :

$$\frac{d^2 J_x}{dt^2} = \gamma B \frac{dJ_y}{dt} = -\gamma^2 B^2 J_x \Rightarrow \frac{d^2 J_x}{dt^2} + \omega_0^2 J_x = 0$$

où $\omega_0 = |\gamma| B = \frac{|q| \hbar B}{2m}$ est la pulsation de Larmor.

$J_x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ en est une solution générale.

et on en déduit J_y :

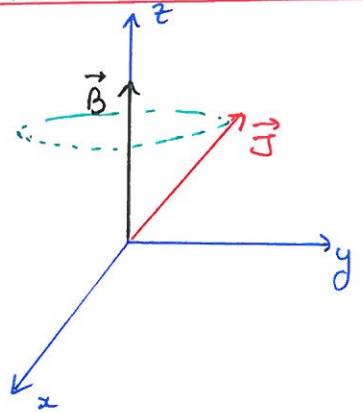
$$\gamma B J_y = \frac{dJ_x}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ J_y = -\gamma A \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array} \right. \quad \text{et } J_z = \text{cte}$$

Le moment cinétique précesse donc dans le plan xOy , autour du vecteur \vec{B} , de telle sorte que J_z est conservé :

Le sens de rotation est donné par $\gamma(\delta)$, c'est-à-dire le signe de la charge de la particule.



6) L'hamiltonien est la transformée de Legendre du lagrangien :

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

où ici

$$L = \sum p_i \dot{q}_i - H = p \dot{\varphi} - H = J \cos \theta \dot{\varphi} + \gamma \vec{J} \cdot \vec{B}$$

d'où

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}) = J \dot{\varphi} \cos \theta + \gamma \vec{J} \cdot \vec{B}$$

et donc

$$S[\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta}] = \int_{t_1}^{t_2} (J \dot{\varphi} \cos \theta + \gamma \vec{J} \cdot \vec{B}) dt$$

On remarque quelque chose d'étrange sur le lagrangien : contrairement aux lagrangiens habituels, celui-ci est linéaire en les vitesses ($\dot{\varphi}$ ici). $\dot{\varphi}$ disparaît donc de l'hamiltonien lors de la transformée de Legendre !

Comme $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\varphi}^2} = 0$, il faut prendre certaines précautions lorsqu'on opère la transformation, et c'est pour cette raison qu'on a un seul couple de variable conjuguées $(\varphi, J \cos \theta)$ et non pas deux comme on aurait pu s'y attendre : (φ, p_φ) et (θ, p_θ) .

1.2 Magnétisme dans un matériau ferromagnétique

4

1.2.1 Énergie d'échange

7) \vec{m} est un vecteur normé par définition : $\|\vec{m}\| = 1$
Ce dont il faudra se souvenir pour la question 18.

8) On utilise la définition de \vec{m} précédente, ainsi que celle de \vec{J}

$$\begin{aligned}(\partial_x \vec{m})^2 &= \frac{1}{J_z} \left((\partial_x J_x)^2 + (\partial_x J_y)^2 + (\partial_x J_z)^2 \right) \\ &= \left(\partial_x \theta \cos \theta \cos \varphi + \partial_x \varphi (-\sin \varphi) \sin \theta \right)^2 + \left(\partial_x \theta \cos \theta \sin \varphi + \partial_x \varphi \sin \theta \cos \varphi \right)^2 + (\partial_x \theta \sin \theta)^2 \\ &= (\partial_x \theta)^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta) \\ &\quad + (\partial_x \varphi)^2 (\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \\ &\quad + \underbrace{2 \partial_x \theta \partial_x \varphi (-2 \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta + 2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi)}_{= 0}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{\text{ech}} = A \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_x \varphi)^2 \right] dx$$

9) E_{ech} joue ici le rôle d'action, dont le lagrangien associé est

$$L(x, \theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = (\partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_x \varphi)^2$$

Nous avons deux variables θ et φ , d'où deux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2 \partial_{xx} \theta - 2 \cos \theta \sin \theta (\partial_x \varphi)^2 = 0$$

d'où
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2 \frac{d}{dt} (\partial_x \varphi \sin^2 \theta) = 0$$

$$\begin{aligned}\partial_{xx} \theta &= \cos \theta \sin \theta (\partial_x \varphi)^2 \\ \frac{d}{dt} (\partial_x \varphi \sin^2 \theta) &= 0\end{aligned}$$

10) La question précédente donne une constante du mouvement $\partial_x \varphi \sin^2 \theta$.
Cela découle directement de la cyclicité de φ : $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$.

On peut aussi remarquer que $L(x, \dots)$, donc l'hamiltonien doit être conservé, ce qui donne la même constante.

11) On remarque que tous les termes de E_{ech} sont paires. Il suffit donc de trouver φ et θ telles que $E_{ech} = 0$ afin de résoudre le problème !

$$\varphi = \text{cte et } \theta = \text{cte} \text{ donnent } E_{ech} = 0.$$

Cela signifie concrètement que le champ de spins est uniforme sur tout l'échantillon, c'est-à-dire que tous les spins sont orientés dans la même direction.

\Rightarrow l'énergie d'échange tend donc à aligner tous les spins dans le matériau.

Il faut des éléments supplémentaires pour comprendre l'apparition de domaines et de parois.

1.2.2 Un exemple de paroi de domaines

12) On a $\|\vec{m}\|^2 - m_z^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$. De plus, on se place à $\varphi = 0$, d'où

$$L(x, \theta, \partial_x \theta) = A(\partial_x \theta)^2 + K \sin^2\theta$$

13) On a encore $L(x, \theta, \partial_x \theta)$, donc l'hamiltonien est une quantité conservée :

$$H = \frac{\partial L}{\partial(\partial_x \theta)} \partial_x \theta - L = 2A(\partial_x \theta)^2 - A(\partial_x \theta)^2 - K \sin^2\theta.$$

d'où :

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{4} - K \sin^2\theta = \text{cte}$$

c'est-à-dire

$$A(\partial_x \theta)^2 - K \sin^2\theta = \text{cte}.$$

On en $x \rightarrow -\infty$, on a $\theta(-\infty) = 0$, et on suppose physiquement que $\partial_x \theta \rightarrow 0$, d'où

$$A(\partial_x \theta)^2 = K \sin^2\theta$$

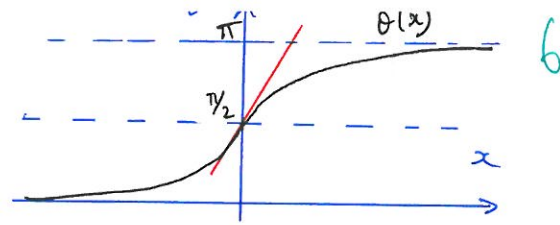
ie

$$\partial_x \theta = \sqrt{\frac{K}{A}} \sin\theta$$

14) L'énergie du mur s'écrit

$$\begin{aligned} E_{ech} + E_a &= \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\partial_x \theta)^2 + K \sin^2\theta) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2K \sin^2\theta dx = \int_0^\pi \frac{2K \sin^2\theta}{\sqrt{\frac{K}{A}} \sin\theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{AK} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\sqrt{AK} \end{aligned}$$

15) La forme du mur est un th
 La pente en 0 est donnée par $\partial_x \theta(0)$
 par définition. Et en 0, la fonction
 étant symétrique, on a $\theta(x=0) = \pi/2$.



d'où

$$\partial_x \theta(0) = \sqrt{\frac{K}{A}}$$

Par analyse dimensionnelle, $\partial_x \theta(0) \sim \frac{1}{L}$. On en déduit la taille
 du mur de Bloch :

$$L \sim \sqrt{\frac{A}{K}}$$

La taille d'un mur de Bloch est donc une question de compromis entre énergie
 d'échange et énergie d'anisotropie.

1.2.3 Domaines de Weiss et équations micromagnétiques

16) L'énergie volumique du champ magnétique est $w_{EM} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

17) - À l'échelle microscopique, l'énergie dominante est l'énergie d'échange
 d'origine quantique

- L'énergie magnétique grandit comme le volume du matériau, alors
 que l'énergie d'échange grandit comme la surface puisque sa portée
 est très petite.

\Rightarrow On en déduit l'existence d'une taille microscopique L où les deux
 énergies sont du même ordre de grandeur.

- On s'efforce à aligner les moments, alors que E_{mag} grandit lorsque
 les spins sont tous alignés, et va donc chercher à les anti-aligner.

\Rightarrow Ces arguments expliquent l'origine des domaines de Weiss.

Ces domaines de Weiss résultent donc d'un compromis entre énergie d'échange
 et énergie magnétique.

18) On peut réécrire le lagrangien complet en termes du vecteur \vec{m} : \int

$$L(x, m_x, \partial_x m_x, m_y, \partial_x m_y, m_z, \partial_x m_z) = A(\partial_x \vec{m})^2 + K(\|\vec{m}\|^2 - m_z^2) + \frac{1}{2} J \vec{m} \cdot \vec{B}_{int}$$

Il s'agit donc de minimiser $E = \int_{-\infty}^{+\infty} L dx$, avec la contrainte $\|\vec{m}\| = 1$.

On utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange en introduisant λ , et l'action à minimiser devient

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\partial_x \vec{m})^2 + K(\|\vec{m}\|^2 - m_z^2) + \frac{1}{2} J \vec{m} \cdot \vec{B}_{int} + \lambda(\|\vec{m}\|^2 - 1)$$

Il y a trois variables m_x, m_y, m_z , donc trois équations d'E-L associées, que l'on peut écrire de façon vectorielle

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_x \vec{m})} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{m}} = 0$$

ie

$$2A \partial_{xx} \vec{m} - F_{ani}[\vec{m}] - \frac{J}{2} B_{int} - \lambda \vec{m} = 0$$

où

$$F_{ani}[\vec{m}] = \begin{pmatrix} 2m_x \\ 2m_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

