Stephan Fauve, Aurélie Fargette & Arnaud Raoux

Examen de mécanique analytique (L4)

Les deux parties contribueront de manière équivalente à la note finale. **Merci de les traiter sur des copies séparées.** Les copies présentant des sous-parties traitées en profondeur à l'inverse des tentatives de « grapillage » seront valorisées. Les vecteurs seront notés en gras.

1 Approche variationnelle du magnétisme

1.1 Spin isolé

On s'intéresse à une particule isolée, possédant un moment cinétique intrinsèque (*spin*) $\boldsymbol{J}$. Ce moment cinétique est lié à un moment magnétique $\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{J}$. Dans la base sphérique,

$$\boldsymbol{J} = J \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On admettra que $q = \varphi$ et $p = J\cos\theta$ sont des variables canoniquement associées dans le formalisme hamiltonien, et on négligera l'énergie cinétique de la particule.

1. Calculer $\{A, B\}_{q,p}$ en fonction de $\{A, B\}_{\varphi,\theta}$.
2. En déduire $\{J_x, J_x\}_{q,p}$, $\{J_x, J_y\}_{q,p}$ et $\{J_x, J_z\}_{q,p}$, et commenter le résultat.
3. Écrire l'énergie de la particule en présence d'un champ magnétique à l'aide des notations d'Einstein.
4. En utilisant le formalisme hamiltonien, en déduire l'équation différentielle vérifiée par J_x.
5. On admet la généralisation suivante de la question précédente
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \gamma \boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B}. \tag{2}$$
Résoudre l'équation précédente pour $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{u}_z$, et en déduire le mouvement du spin de la particule dans un champ magnétique.
6. Après avoir rappelé le lien entre hamiltonien et lagrangien, calculer le lagrangien et l'action.

1.2 Magnétisme dans un matériau ferromagnétique

Dans cette partie, on cherche à expliquer un effet collectif des spins dans un milieu magnétique : le ferromagnétisme. À courte échelle, ceux-ci vont avoir tendance à s'aligner les uns avec les autres, selon certaines directions privilégiées. À grande échelle en revanche, on observe des domaines décorrélés les uns des autres, comme illustré sur la figure 1.

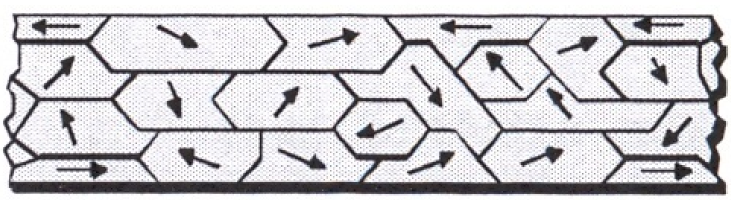

Figure 1 – Schéma d'un matériau ferromagnétique possédant des domaines de Weiss

Le système va chercher à minimiser son énergie, celle-ci jouera donc le rôle de l'action du problème (et **non** celui de l'hamiltonien) dans tout ce qui suit. On se place en l'absence de champ magnétique extérieur.

1.2.1 Énergie d'échange

Des particules de spin $\boldsymbol{J}$ sont contraintes sur un réseau unidimensionnel. On se place dans une description mésoscopique où le spin $\boldsymbol{J}(x)$ est le moyenne des spins à entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. On définit $\boldsymbol{m}(x) = \boldsymbol{J}(x)/J$.

On associe aux spins une *énergie d'échange*

$$E_{\text{ech}} = A \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \boldsymbol{m})^2 \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

avec A une constante positive.

7. Quelle contrainte vérifie $\boldsymbol{m}(x)$?
8. En utilisant Eq. (1), montrer que

$$E_{\text{ech}} = A \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\partial_x \theta)^2 + f(\theta)(\partial_x \varphi)^2 \right] \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

   avec $f(\theta)$ une fonction à déterminer.
9. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à cette fonctionnelle.
10. Trouver une constante du mouvement.
11. Sans chercher à résoudre les équations précédentes, donner la solution $\boldsymbol{m}(x)$ qui minimise l'énergie E_{ech}.

1.2.2 Un exemple de paroi de domaines

Selon le cristal, certaines directions d'aimantation peuvent être favorisées. Dans le cas d'un réseau cubique par exemple, les arrêtes ou les diagonales du cube peuvent être des directions d'aimantation privilégiées. On s'intéresse ici au cas simple d'une anisotropie axiale : une énergie supplémentaire

$$E_a = K \int_{-\infty}^{\infty} (||\boldsymbol{m}||^2 - m_z^2) \, \mathrm{d}x \tag{5}$$

est ajoutée à l'énergie d'échange. On se place à $\varphi = 0$, et on souhaite décrire un changement d'aimantation de $\theta(-\infty) = 0$ à $\theta(+\infty) = \pi$, communément appelé un *mur de Bloch*.

12. Exprimer le nouveau lagrangien $L(\theta, \partial_x \theta, \varphi, \partial_x \varphi)$ associé aux fonctionnelles (4) et (5).
13. Exprimer $\partial_x \theta$ en fonction de $\sin\theta$, A et K.
14. Sans chercher à connaître la forme précise du mur, en déduire son énergie totale.
15. Typiquement, ce mur $\theta(x)$ a la forme d'un $\mathrm{th}(x)$. La taille de ce mur étant définie par la pente en 0 de la fonction $\theta(x)$, donner sa valeur.

1.2.3 Domaines de Weiss et équations micromagnétiques

Une troisième énergie, dite *énergie démagnétisante*, doit être prise en compte pour comprendre la formation de domaines dans un matériau ferromagnétique : des spins tous alignés dans la même direction vont créer un champ magnétique, qui possède une certaine énergie.

16. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie d'un champ magnétique.
17. Par un argument d'échelle, expliquer la création de domaines magnétiques. En déduire la taille typique des domaines en fonction des données du problème.
18. On admet que le terme d'énergie démagnétisante contribue avec un terme linéique $\frac{1}{2} J\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\text{int}}$ où $\boldsymbol{B}_{\text{int}}$ est le champ magnétique interne au matériau. Après avoir écrit le lagrangien complet du système en terme du vecteur $\boldsymbol{m}$ à l'aide de Eqs. (3,5), trouver les équations d'Euler-Lagrange générales. On appelle ces équations les *équations micromagnétiques*.

2 Oscillateurs couplés

Merci de rédiger cette partie sur une copie séparée.

2.1 Effet du couplage sur les fréquences propres d'oscillation

Nous allons étudier quelques effets qui résultent du couplage entre deux oscillateurs. Nous considérons le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + axy.$$

1. Ecrire les équations du mouvement pour $x(t)$ et $y(t)$.
2. Faire le schéma d'un système comportant deux masses et trois ressorts régi par les équations obtenues.
3. On note $\omega_0^2 = k/m$ et $\alpha = a/m$. Chercher des solutions de la forme $\exp st$ pour $x(t)$ et $y(t)$ et trouver l'équation pour s.
4. Montrer que la différence entre les fréquences propres augmente avec l'intensité du couplage (on peut considérer $\alpha \ll \omega_0^2$).

2.2 Effet d'un couplage faisant intervenir les vitesses

On considère à présent une forme de couplage différente avec le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + b(\dot{x}y - x\dot{y}).$$

5. Ecrire les équations du mouvement pour $x(t)$ et $y(t)$.
6. Ce système est-il conservatif d'après la définition donnée en cours ?
7. Montrer directement à partir des équations du mouvement que l'énergie des oscillateurs harmoniques couplés est conservée.
8. Les équations du mouvement sont-elles invariantes par renversement du temps ? Sous quelle transformation impliquant le renversement du temps sont-elles invariantes ? Commenter.
9. Quel est l'effet de l'intensité du couplage sur les fréquences propres d'oscillation ?

2.3 Instabilité par confusion de fréquences

On considère les système d'équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_1^2 x + \alpha y, \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_2^2 y + \beta x. \tag{7}$$

10. On suppose $\alpha\beta < 0$ et petit. Chercher des solutions de la forme $\exp st$ pour $x(t)$ et $y(t)$ et montrer que le système est instable pour une valeur critique de $|\alpha\beta|$ qui dépend de ω_i ($i = 1, 2$). Que se passe-t-il pour $\omega_1 = \omega_2$?
11. Dessiner dans le plan $(\Re e\, s, \Im m\, s)$ ($\Re e$ et $\Im m$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire) le lieu des solutions s_i juste avant et après le seuil d'instabilité.
12. On remarque que si s est solution, alors $-s$ et $\bar{s}$ (le complexe conjugué de s) sont aussi solutions. Pourquoi ?

2.4 Méthode des échelles multiples

On considère $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \omega_0 + \epsilon\delta$, $\alpha = \epsilon a$ et $\beta = \epsilon b$ avec $\epsilon \ll 1$ et ω_0, δ, a et b d'ordre 0. On note $x(t) = u(t, T)$ et $y(t) = v(t, T)$ avec $T = \epsilon t$.

13. Trouver les équations différentielles pour u et v au premier ordre en ϵ à partir des équations (6, 7).

14. Montrer qu'à l'ordre le plus bas, on obtient

$$
\begin{aligned}
u(t,T) &= A(T)e^{i\omega_0 t} + \bar{A}(T)e^{-i\omega_0 t} \\
v(t,T) &= B(T)e^{i\omega_0 t} + \bar{B}(T)e^{-i\omega_0 t}.
\end{aligned}
$$

15. Utiliser la condition de solvabilité à l'ordre ϵ pour trouver l'équation différentielle qui gouverne $A(T)$ ou $B(T)$.
16. Chercher une solution de la forme e^{sT} et donner l'expression de s.
17. Retrouver les résultats des questions 4 et 10.