Examen de mécanique analytique

FIP

Novembre 2012

L'examen est constitué de deux exercices indépendants abordant différents points du cours. N'hésitez pas à les traiter dans l'ordre qui vous plaît le plus.
Les calculatrices et les documents sont interdits.
Durée totale 2H.

1 A en perdre ses cheveux !

On s'intéresse à la mécanique des cheveux que nous allons étudier à deux dimensions (dans le plan Oxz). Les cheveux pouvant être frisés pourront avoir une courbure spontanée. Comme nous nous intéressons aux terriens nous allons supposer que les cheveux sont dans le champ de pesanteur vertical g.

1.1 Energie d'un cheveu

On notera S l'abscisse curviligne le long du cheveu de longueur L supposée différente de 0 (bien que ce cas particulier aboutisse à un résultat bien plus esthétique et simple à traiter !). Le cheveu se comporte comme une poutre cylindrique. Une poutre sans courbure spontanée et en dehors du champ de pesanteur possède une énergie donnée par la relation :

$$E = \mathcal{E}I \int_0^L \frac{1}{2} \left(\kappa(S) - \kappa_0\right)^2 dS$$

avec $\kappa(S)$ qui est la courbure locale de la poutre , $\mathcal{E}I$ son module de courbure.

On cherche à trouver l'équation vérifiée par $\theta(S)$ qui est l'angle entre la tangente au cheveu et l'axe horizontal.

Pourquoi appelle-t-on κ_0 la courbure spontannée ?

Exprimer κ en fonction de θ.

Exprimer l'énergie totale en incorporant la pesanteur. Pour cela on notera ρ la densité volumique du cheveu, σ sa section. Effectuer un changement de variable $s = S/L$ et montrer que l'énergie peut alors s'écrire :

$$E = \frac{\mathcal{E}I}{L}\left(\int_0^1 \left[\frac{1}{2}(\bar{\kappa}-\alpha)^2 + \frac{\int_0^s \sin\theta ds'}{\beta}\right] ds\right)$$

avec $\alpha = L\kappa_0$, $\bar{\kappa} = L\kappa$ et $\beta = \frac{\mathcal{E}I}{\rho g \sigma L^3}$.

1.2 Interpretation qualitative

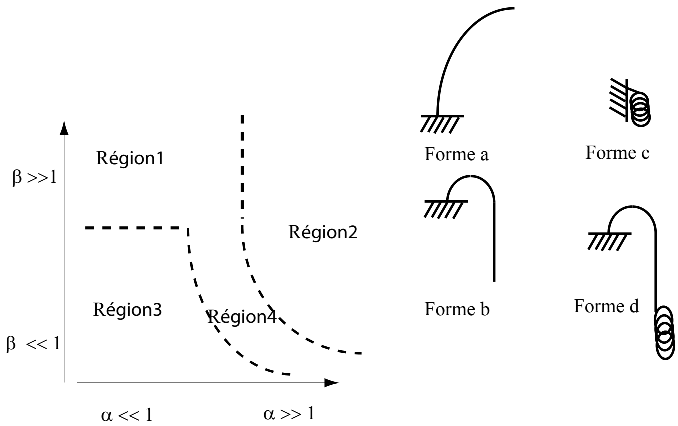

FIGURE 1 – Forme des cheveux en fonction des paramètres adimensionés α et β.

Situer dans le diagramme de la figure 1) la forme des cheveux en fonction des paramètres α et β à partir des modèles proposés.

1.3 Minimisation de l'énergie

Montrer que

$$\bar{E} = \frac{E}{\frac{\mathcal{E}I}{L}} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(\bar{\kappa}-\alpha)^2 + \frac{1-s}{\beta}\sin\theta(s)\right] ds$$

On pourra représenter le domaine d'intégration dans le plan (ss'). En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

Montrer que θ vérifie les conditions aux limites suivantes $\theta(s=0)=\theta_0$ et $\frac{d\theta}{ds}(s=1)=\alpha$. Donner le sens physique de ces deux conditions.

1.4 Cas de la faible gravité

Résoudre le problème dans le cas ou la gravité est nulle (Cas de Thomas Salez !). On notera θ^a la solution. On va maintenant étudier le cas ou β est grand mais non infini. On va donc faire un développement au premier ordre et présupposer une solution $\theta=\theta^a+\theta^b$ avec $\theta^b << \theta^a$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ^b dans la limite ou $\beta >> 1$ est :

$$\frac{d^2\theta^b}{ds^2}=\frac{(1-s)}{\beta}\cos\theta^a(s)$$

La suite de cette question est plus délicate : on va se placer dans le cas $\alpha >> 1$. Avec cette hypothèse la solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\theta^b=\frac{(as+b)}{\beta}-\frac{(1-s)}{\beta\alpha^2}\cos(\theta_0+\alpha s)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

Utiliser les conditions aux limites pour obtenir a et b.

En déduire que la variation de différence de hauteur entre la racine du cheveu et son extrémité dûe à la gravité est donnée par $\delta z/L=-\frac{1}{4\alpha^2\beta}$.

1.5 Discussion qualitative du cas de la forte gravité

On s'intéresse maintenant au cas ou l'influence la gravité est très forte. Le cheveu va alors passer de sa condition d'ancrage à la racine avec l'angle θ_0 à un cheveu vertical. L'effet de la courbure spontanée ne pourra intervenir qu'au bout du cheveu. Dans la zone de transition on peut montrer que les variations de θ sont beaucoup plus rapides que celles de s. On peut donc se ramener à une équation du type :

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{s}^2}-s_0\cos\theta(\tilde{s})=0$$

ou $\tilde{s}=\frac{1-s}{\beta^{\frac{1}{3}}}$ et s_0 reste constant.

Donner un exemple mécanique aboutissant à ce même type d'équation.

Donner le Lagrangien de ce système équivalent. En déduire le Hamiltonien décrivant la dynamique de ce système. Donner les équations du mouvement. Tracer les trajectoires dans l'espace des phases.

En déduire la forme des cheveux dans ce régime en fonction de l'endroit où l'on se situe dans l'espace des phases associé.

Nous vous conseillons fortement la lecture de l'ouvrage de nos collègues B. Audoly et Y. Pomeau Elasticity and Geometry publié chez Oxford University Press qui est à la bibliothèque si vous voulez en savoir plus sur ce sujet.

2 Précession de l'orbite de Mercure

Nous avons vu en étudiant le problème de force centrale à deux corps que la trajectoire d'une planète de masse m dans le champ gravitationel créé par le soleil de masse M est une ellipse possédant le soleil pour foyer. En pratique il a été observé dans le cas de Mercure que cette ellipse tourne légèrement entre deux périodes : c'est le phénomène d'avance du périhélie. Il a fallu faire appel à la relativité générale pour prédire de manière quantitative ce phénomène qui est le plus marqué dans le cas de Mercure.

2.1 Mouvement de Mercure en mécanique classique

Donner le Lagrangien du système. Utiliser les symétries et invariances pour trouver deux grandeurs conservées.

2.2 Mouvement en mécanique relativiste

L'action que nous devons prendre est celle de la relativité : $S = -mc \int ds$ ou c est la célérité de la lumière dans le vide et ds est l'élément de longueur de l'espace temps avec la métrique $g_{\mu\nu}$ avec μ,ν =0,1,2,3 dans le jeu de coordonnées $x = (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ soit plus explicitement :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

en utilisant la notation d'Einstein sur la sommation. Dans le cas qui nous concerne il faut utiliser la métrique, dite de Schwarzschild, qui permet d'écrire :

$$ds^2 = e(r)c^2dt^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) - dr^2/e(r)$$

avec $e(r) = 1 - \frac{2\mathcal{G}M}{c^2 r} = 1 - \frac{r_0}{r}$ ou r_0 est le rayon de Schwarzschild du soleil, $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

2.3 Lagrangien

Ecrire l'action comme une intégrale sur le temps pour faire apparaître le Lagrangien.

On prendra la limite classique comme la limite ou $c \to \infty$. Montrer que l'on retrouve la dynamique du Lagrangien classique.

2.4 Symétries et invariance

Utiliser les symétries et invariances pour trouver deux grandeurs conservées.

2.5 Energie

Calculer les implusions associées aux coordonnées utilisées. Montrer que l'énergie peut s'écrire :

$$E = \frac{\sigma c^2 e(r)}{r^2 \dot{\phi}}$$

avec

$$\sigma = \frac{m r^2 \dot{\phi}}{\sqrt{\left(e(r) - \frac{1}{c^2}(r^2\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{e(r)})\right)}}$$

qui est le moment angulaire.

On supposera que la trajectoire reste dans le plan correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2.6 Trajectoire

Faire le changement de variable $u = \frac{1}{r}$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u est

$$u'^2 = \frac{E^2}{c^2\sigma^2} - (1 - r_0 u)\left(u^2 + \frac{m^2c^2}{\sigma^2}\right)$$

avec $u' = \frac{du}{d\phi}$. La dériver par rapport à ϕ pour obtenir une équation différentielle du deuxième ordre pour u.

Chercher des solutions u_c pour des trajectoires circulaires.

On va chercher des perturbations de ces trajectoires. Pour cela on pose $v = u - u_c$ avec v qui reste petit devant u_c.

Linéariser les équations pour trouver l'équation vérifiée par v.

Montrer qu'une solution est stable.

Donner le décalage angulaire à chaque passage au point le plus proche du soleil (périhélie).