$\boxed{\text{Examen de mécanique analytique}}$

FIP

Novembre 2010

L'examen est constitué de trois exercices indépendants abordant différents points du cours.
Les calculatrices et les documents sont interdits.
durée totale 2H.

1 Masse sur une tige

On considère une masse m qui peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale de longueur l et de masse M. On notera J son moment d'inertie. La tige peut tourner autour de son milieu O avec une vitesse angulaire quelconque $\dot{\phi}$ ou ϕ est l'angle qui repère la rotation de la tige. La masse m est soumise à une force de rappel élastique qui la ramène au niveau du centre O. On notera k la constante de raideur associée.

1.1 Quelles sont les énergies potentielle et cinétique ?

1.2 Quel est le Hamiltonien décrivant le problème ?

1.3 Quelles sont les positions d'équilibre ? Déterminer les pulsations autour de ces positions d'équilibre.

2 Changement de coordonnées : le référentiel tournant

On considère une particule de masse m qui évolue dans un potentiel central $V(r)$. La particule décrite par ses positions et impulsions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ dans $\mathcal{R}$ référentiel galiléen, et nous noterons par $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ les nouvelles variables canoniques dans $\mathcal{R}'$ référentiel qui tourne avec une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_z}$ et t le temps. On pourra noter R_α la rotation d'angle α.

2.1 Exprimer R en fonction de r.

2.2 Changement de coordonnées en description Lagrangienne

2.2.1 Ecrire le Lagrangien dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$

2.2.2 En déduire les Hamiltoniens dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$

2.3 Changement de coordonnées en description Hamiltonienne

On reprendra le Hamitonien dans $\mathcal{R}$ trouvé dans la question précédente. On considère la transformation canonique engendrée par la fonction génératrice :

$$G_2(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{P}.\mathsf{R}_{-\mathbf{\Omega t}}(\mathbf{r})$$

On pourra introduire (x, y, z) et (X, Y, Z) les coordonnées de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ et $\alpha = \Omega t$.

2.3.1 Démontrer le lien entre les anciennes et les nouvelles coordonnées à partir de la fonction génératrice utilisée.

2.3.2 Que vaut le nouvel Hamiltonien dans le référentiel tournant ?

3 A un an de la coupe du monde en Nouvelle Zélande : un tout petit, tout petit peu de rugby

On considère un poteau de rugby cylindrique de section S , de longueur l et de module élastique E (il vaut le module d'Young divisé par l'aire du matériau) et de moment d'inertie I. On ne considère qu'un seul des poteaux verticaux.

3.1 Effet du poids

On est sur la terre avec une pesanteur notée g. On notera $h(z)$ le déplacement vertical d'un élément du poteau par rapport à sa position sans pesanteur. C'est à dire qu'un élément situé à une hauteur z sans pesanteur va se retrouver sous l'effet du poids à une hauteur $z + h(z)$.

3.1.1 Passage du discret au continu

Ecrire l'énergie d'une chaîne de ressorts de longeur à vide a et de raideur k. Passer à la limite $a \to 0$ pour décrire l'élasticité du milieu continu qu'est le poteau. On admet que $ka \to E$ quand $a \to 0$ En déduire l'énergie du poteau sous l'effet de son poids ?

3.1.2 Quelle équation différentielle du second ordre vérifie h ?

3.1.3 Conditions aux limites

Exprimer les conditions aux limites au sol, endroit ou le poteau est planté dans la terre. Si aucune masse n'est posée sur le sommet du poteau qu'elle est la condition aux limites au sommet du poteau ?

3.1.4 En déduire la variation de longueur du poteau entre sa position verticale et sa position horizontale.

3.2 Effet du vent

La Nouvelle Zélande étant un ensemble d'îles très au sud est soumise à des vents assez réguliers et parfois forts. On va considérer son effet sur la courbe décrite par les poteaux. Nous allons dans cette partie négliger la pesanteur. L'effet du vent va se modéliser par une force par unité de longueur que l'on va prendre constante le long du poteau et égale à $\alpha\vec{y}$ y étant la directon horizontale du vent. La courbe décrite par le poteau sera notée $y(z)$. On admet (voir Landau Lifchitz, Théorie de l'élasticité...la physique ne s'arrête pas aux cours et aux examens) que l'énergie due à la courbure du poteau s'écrit :

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^l EI\ddot{y(z)}^2 dz$$

où $y\ddot{(z)}$ est la dérivée seconde de y par rapport à z.

3.2.1 Ecrire l'énergie totale du poteau dans le vent

3.2.2 Utiliser les principes variationnels pour trouver l'équation différentielle vérifiée par $y(z)$.

3.2.3 L'absence de force et de moment à l'extrémité haute du poteau entraîne la nullité des dérivées respectivement troisièmes et secondes de y (voir Landau Lifchitz). En déduire la déflection du poteau à son extrémité haute.

3.3 Question bonus : le flambage

Le vent est maintenant négligé. On néglige également la masse volumique du poteau. Par contre désormais on met une masse M en haut du poteau. Pour une masse donnée le poteau peut rester droit ou, si la masse est assez grande, le poteau peut se courber, c'est le phénomène de flambage. On veut connaître la masse critique M_c pour laquelle ce flambage a lieu. On pourra chercher un mode de déformation sous forme de sinus. Montrer que ce seuil vaut

$$M_c = \frac{\pi^2 EI}{4gl^2}$$

3.4 Question vraiment subsidiaire : quelle est la hauteur réglementaire d'un poteau de rugby ?