Examen de mécanique analytique

FIP

Novembre 2009

L'examen est constitué de trois exercices indépendants abordant différents points du cours.
Les calculatrices et les documents sont interdits.
ée totale 2H.

1 Hamiltonien d'un électron dans un champ magnétique

On considère le mouvement d'un électron de charge e et de masse m dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B}$. On introduira la pulsation $\omega = \frac{eB}{m}$.

1. On montrera que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ convient. On ne s'intéressera qu'aux mouvements plans.

2. Ecrire le Lagrangien du sytème.

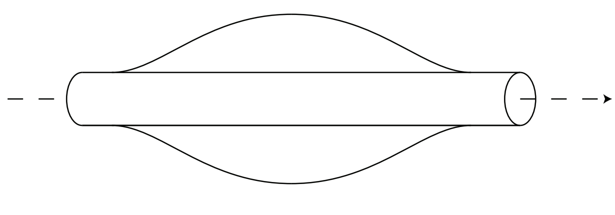
3. Donner les impulsions du problème.

4. Ecrire le Hamiltonien en coordonnées polaires.

5. Que peut on dire pour l'impulsion associée à la coordonnée radiale dans le cas des trajectoires circulaires ? Donnez l'expression de p_θ pour ces trajectoires.

6. On étudiera la stabilité de telles trajectoires en écrivant le Hamiltonien des perturbations.

2 Goutte sur une fibre



On pose une petite goutte de liquide sur une fibre de rayon a, et on se demande quel profil elle adopte à l'équilibre. On suppose que le profil se raccorde avec un angle nul sur la fibre et qu'il possède une symétrie cylindrique. On utilisera donc une représentation $r(x)$ pour le profil ou x est la coordonnée le long de l'axe de la fibre. On notera γ la tension de surface du liquide.

1. Quelle est la dimension de γ ?

2. Donner la relation permettant de minimiser l'énergie en prenant en compte les quantités à conserver. On introduira un multiplicateur de Lagrange dont on donnera la dimension. En déduire une équation différentielle vérifiée par r ? Pouvez vous interpréter physiquement la relation obtenue ?

3. Montrer que la quantité : $\lambda(r^2-a^2)-2\gamma\frac{r}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}$ est constante ? Donner la valeur de la constante en fonction des paramètres du problème.

4. Interprétation de la relation : faites un bilan de forces sur un portion de la goutte à l'équilibre contenue entre le point de raccordement et une abscisse quelconque. On rappelle que la tension de surface peut intervenir de deux façons sur les forces : elle tire tangentiellement à l'interface et perpendiculairement aux lignes de contact selon une force linéique γ, et provoque ainsi une différence de pression Δp à la traversée de l'interface. Comment alors interpréter la quantité conservée ? Comment interpréter le multiplicateur de Lagrange ?

5. Déterminer le rayon maximal de la goutte.

3 Une application de la méthode de Hamilton Jacobi : l'effet Stark

On considère une particule de masse m et de charge e est placée dans un champ électrique constant et uniforme $\vec{E}$ et dans un champ coulombien $U = \frac{\alpha}{r}$. Ceci correspond typiquement à un électron en interaction avec un noyau le tout placé dans un champ électrique. L'origine du repère utilisé est placée au niveau du noyau.

On pourrait être tenté de se placer dans les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) avec comme axe des z la direction du champ électrique. Cependant pour profiter au mieux de la méthode de résolution de Hamilton Jacobi il est intéressant de se placer dans le cadre des coordonnées paraboliques (ξ, η , θ) telles que $\xi = r + z$ et $\eta = r - z$ ou $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ est la distance au centre et z la coordonnée sur l'axe porté par le champ électrique.

1. Exprimer le Lagrangien en coordonnées cylindriques.

2. Exprimer le Lagrangien en coordonnées paraboliques.

3. Déterminer les impulsions p_ξ , p_θ et p_η.

4. En déduire le Hamiltonien.

5. Que peut on dire pour la variable θ ?

6. Comment s'écrit l'équation de Hamilton Jacobi pour ce système ? Combien de constantes doit on faire apparaître pour avoir une solution complète ?

7. En utilisant la séparation des variables faire apparaître ces constantes. Que vaut l'action en fonction de ces variables ?

8. Expliquer succintement en quoi le problème peut être considéré comme résolu à ce point.

9. Quelle relation permet d'obtenir l'équation horaire ?

10. La suite cherche à préciser l'origine de la constante la moins intuitive. Montrer que pour une particule dans un champ central $\vec{v} \wedge \vec{\sigma} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$ est une constante avec $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. Quelle est la composante suivant z de ce vecteur ? Des deux relations définissant la constante en question éliminer l'énergie. Puis en faisant apparaître les impulsions p_ρ et p_z interpréter la constante.