

Examen de Mécanique analytique

FIP

17 novembre 2008

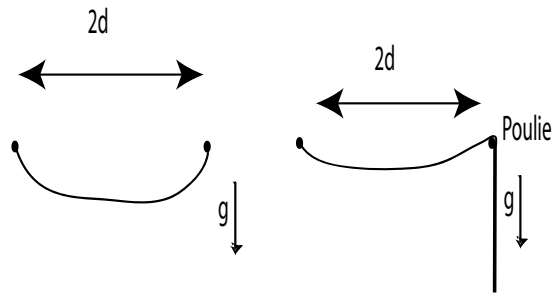
L'examen est constitué d'exercices indépendants.
Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les questions sont écrites en français *et* en anglais. La rédaction doit être en Français *ou* en Anglais ...pas les deux. Durée totale 2H.

- There are three independent parts.

No documents allowed.

Only French or English are allowed for the answers. Duration 2H.

Première partie



Une corde de masse linéique μ et de longueur L est attachée entre deux points situés à une même altitude. La distance entre les points est $2d$. On notera g la valeur du champ de pesanteur.

- A cable of length L , lineic mass μ , is attached between two points which are at the same altitude. Distance between points is $2d$. Gravity is noted g .

1 Corde attachée aux deux extrémités

La corde est fixée par ses extrémités entre les deux points. Exprimer ce problème de minimisation sous contrainte. A l'aide d'une intégrale première du mouvement trouver l'équation de la courbe décrite par la corde. On rappelle que la solution de l'équation différentielle $f = \sqrt{1 + f'^2}$ est de la forme $:\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha x + \beta)$.

Déterminer la tension aux extrémités de la corde.

- The cable is fixed at its extremities between the two points. Describe this problem thanks to minimisation techniques. Using a first integral of the movement find the equation describing by the cable. We recall that the solution of the differential equation $f = \sqrt{1 + f'^2}$ is in the form $:\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha x + \beta)$.

- What is the tension at the ends of the cable?

2 Corde attachée entre un point fixe et une poulie

La corde est fixée, comme précédemment par une extrémité à un des deux points qui est fixe. Mais désormais on remplace l'autre point par une poulie et on fait pendouiller le reste de la corde par gravité. Trouver la condition et la position d'équilibre. On fera une résolution graphique de l'équation obtenue.

- Now, the cable is still fixed at one end to the same point. The cable goes above the second point where a pulley is now placed. The cable is hanging submitted to gravity. Find the equilibrium condition and the corresponding position. Perform a graphical solution of the equation.

Deuxième partie

Transformations canoniques

Une particule de masse m et de charge électrique q est placée dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} parallèle à l'axe Oz.

- A particle of mass m and charge q is placed in a constant magnetic field \vec{B} parallel to Oz.

3 Hamiltonien

Montrer que le choix du potentiel vecteur $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ convient pour décrire le champ magnétique. Comment s'écrit le Hamiltonien du système? On posera $\omega_c = \frac{qB}{m}$. On rappelle que le potentiel généralisé dans ce cas s'écrit $U = -q\vec{v} \cdot \vec{A}$ ou \vec{v} est la vitesse de la particule et \vec{A} le potentiel vecteur.

- Show that $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ is a good potential to describe the magnetic field. Write the Hamiltonian for the particle. We will use $\omega_c = \frac{qB}{m}$. We remind that the generalized potential in this case is $U = -q\vec{v} \cdot \vec{A}$ where \vec{v} is particle's speed.

4 Mouvement suivant z

Examiner rapidement le mouvement suivant z .

- Briefly solve the problem along the z axis.

5 Changement de variables

Considérons la transformation (Consider the following transformation) :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega_c}}(\xi_0 + \xi_1) \\y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega_c}}(\eta_0 - \eta_1) \\p_x &= \frac{1}{2}\sqrt{m\omega_c}(\eta_0 + \eta_1) \\p_y &= \frac{1}{2}\sqrt{m\omega_c}(-\xi_0 + \xi_1)\end{aligned}$$

Montrer que cette transformation est canonique. Exprimer l'hamiltonien en fonction des nouvelles coordonnées. Quelles sont les constantes évidentes du mouvement ?

- Demonstrate that this transformation is canonical. Give the expression for the Hamiltonian in the new coordinates. What are the obvious constants of motion for this problem ?

6 Fonction génératrice

6.1

Envisageons maintenant la transformation supplémentaire résultant de la fonction génératrice (We now use the following generating function) :

$$F(Q_0, \eta_0) = -\frac{1}{2}(\eta_0^2 \tan Q_0)$$

Rappeler la différentielle de l'action et en déduire les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. Exprimer à nouveau l'hamiltonien en faisant intervenir les nouvelles coordonnées Q_0 . On notera P_0 l'impulsion correspondante.

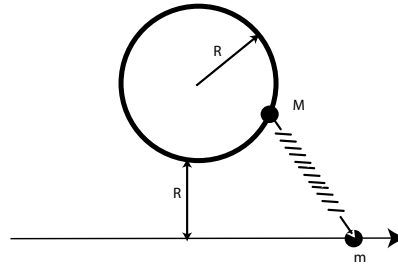
- Write the action differential form and express new coordinates as function of the old ones. What is the new hamiltonian ? Q_0 will be the new coordinate and P_0 the new momentum.

6.2

Exprimer les constantes du mouvement en fonction des grandeurs Q_0 et P_0 . En déduire les solutions en Q_0 et P_0 . Montrer en particulier que Q_0 est linéaire en temps. Poursuivre en trouvant les solutions en ξ_0 et η_0 , puis x et y . Montrer que l'on retrouve bien un cercle dans le plan xy .

- Express constants of motion as function of Q_0 and P_0 . What are the solutions for Q_0 and P_0 ? In particular show that Q_0 is a linear function of time. Gives solutions for ξ_0 and η_0 and finally for x and y . Demonstrate that as expected the solution is a circle in the xy plane.

Troisième partie



Un ressort de raideur k , de longueur à vide négligeable devant les autres grandeurs ($l_0 \sim 0$) est attaché entre une masse m astreinte à se déplacer sans frottements sur une droite horizontale et une masse M qui est se déplace sans frottements sur un cercle vertical fixe, sans masse de rayon R dont le centre est situé à une distance $2R$ de la droite.

- A spring with a stiffness k a negligible rest length ($l_0 \sim 0$), is attached between a mass m constrained to move without friction on an horizontal line and a mass M moving on a vertical circle (radius R) without friction whose center is a distance $2R$ from the line.

7 Lagrangien

Donner le Lagrangien.

- Write the Lagrangian.

8 Positions d'équilibre ?

Donner sans calcul la position d'équilibre stable.

- Without any calculation, give the stable equilibrium positions.

9 Déterminez les pulsations d'oscillation autour de la position d'équilibre stable

Déterminez les pulsations d'oscillation autour de la position d'équilibre stable.

- Determine the oscillating frequencies around the stable equilibrium position ?