Introduction aux notations d'Einstein et tenseurs spéciaux

En théorie des champs les calculs comportent souvent des sommations multiples, donc de nombreux indices, ainsi que des produits vectoriels. Par souci de simplification, on utilise une notation indicielle, avec une convention de sommation des indices répétés. Nous allons ici introduire brièvement cette notation, et définir deux tenseurs que l'on rencontre régulièrement.

1 Notations d'Einstein

Dans cette convention on somme implicitement sur les indices répétés qui apparaissent dans un même terme. Ainsi par définition dans un espace euclidien de dimension N :

$$x_i y_i \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \,. \tag{1}$$

Et, par exemple, si l'on s'intéresse à l'expression $x_k x_l + x_i y_i$, on a :

$$x_k x_l + x_i y_i = x_k x_l + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_k x_l + \mathbf{x}.\mathbf{y} \,,$$

k et l étant donnés dans cette formule ; on les dit « libres » ou « réels », par opposition avec l'indice i dit « muet ».

On utilise généralement les indices latins i, j, k, l, m, n... en dimension 3 et les indices grecs μ, ν, σ, ρ... pour les quadri-vecteurs[1] (dimension 4, la première étant en général le temps). Par exemple, en géométrie euclidienne on écrit :

$$x_\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x_\mu \,, \tag{2}$$

que l'on peut réécrire : $\quad x_\mu x_\mu = x_0 x_0 + x_j x_j = x_0 x_0 + \mathbf{x}.\mathbf{x}\,.$

Pour anticiper quelque peu et éviter les confusions avec la suite, vous verrez en électromagnétisme que les véritables notations d'Einstein définissent des coordonées covariantes et contravariantes en imposant la place des indices ; x_μ et x^μ sont ainsi différents, ils n'appartiennent pas au même espace. Ceci provient de la métrique non-euclidienne de la relativité restreinte. Notamment, $T_{\mu\mu}$ représentera un élément diagonal d'un tenseur (d'une matrice), et ${T_\mu}^\mu$ la trace de cette matrice (sur laquelle on effectue donc une sommation implicite sur les indices μ). Nous passerons complètement sous silence cette distinction dans le cadre des TD de mécanique analytique, et adopterons les sommations implicites sur *tous* les indices muets.

[1] Cette convention est très répandue, sauf par exemple dans le Landau de théorie des champs, qui utilise une convention strictement inverse.

2 Tenseurs spéciaux

2.1 Tenseur unité

On définit le tenseur unité δ comme suit :

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{3}$$

Ce tenseur représente la matrice identité, on appelle aussi δ_{ij} le symbole de Kronecker. Ce symbole entraîne beaucoup de simplification lorsqu'il intervient dans des sommations.

On peut l'invoquer dans la définition du produit scalaire euclidien :

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j \,.$$

Enfin, on aura de façon immédiate en dimension N :

$$\delta_{ii} = \mathrm{Tr}(\delta) = N \,.$$

2.2 Tenseur antisymétrique

Le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ϵ est un tenseur d'ordre 3. Il s'exprime comme suit :

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k, \\ 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation circulaire de (1,2,3)}, \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation circulaire de (3,2,1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Ce tenseur est extrêmement pratique lorsqu'il s'agit d'exprimer des relations algébriques faisant intervenir des produits vectoriels. En effet, on pourra vérifier que :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} \; a_j b_k \,.$$

À titre d'exercice, vous pourrez démontrer que :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \,.$$