Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

DM de Mécanique analytique 2018

Ce DM est un extrait de l'examen de 2017. Merci d'accorder une attention particulière à la rédaction et au soin.

1 Formation de rides sous l'effet d'une compression

Cette première partie s'intéresse au comportement d'une membrane sur un bain liquide inextensible lorsqu'elle est soumise à une force de compression.

On considère une membrane flexible mais inextensible posée sur un bain liquide. La membrane sera comprimée selon l'axe Oy, et on supposera que le problème est invariant par translation selon Ox. Soit ℓ la largeur de la membrane selon Ox, et W la longueur initiale selon Oy. On impose aux extrémités d'être rapprochées selon l'axe Oy d'une distance $\Delta \ll W$. La membrane initialement plane va se déformer selon l'axe Oz (ascendant), et adopter une forme minimisant l'énergie totale du système composé de la membrane et du bain liquide. Cette énergie totale est la somme de l'énergie de courbure de la membrane et de l'énergie potentielle du liquide sous-jacent (la surface du bain liquide étant déterminée par la forme de la membrane, une apparition de rides au niveau de la membrane cause un déplacement de liquide, donc un changement de l'énergie potentielle de pesanteur du liquide).

On donne l'expression de l'énergie de courbure (*bending*) U_B et de l'énergie potentielle de pesanteur du liquide sous-jacent U_p :

$$U_B = \frac{\ell B}{2}\int_A^B (\partial_s \phi)^2 \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad U_p = \frac{\ell K}{2}\int_A^B h^2 \cos\phi \, \mathrm{d}s \tag{1}$$

où s est une abscisse curviligne, h le déplacement vertical local (selon l'axe Oz), ϕ l'angle local entre l'horizontale et la surface, B une constante appelée raideur de courbure, et K une constante reliée à la masse volumique du substrat. A et B sont les positions repérant les extrémités de la membrane selon l'axe Oy.

1. aire un schéma du système étudié, sur lequel vous représenterez les grandeurs locales ϕ et h, ainsi que les variations $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}h$ et $\mathrm{d}s$.

2. Justifier l'expression de U_p.

3. Donner les dimensions de B et K. On se placera ensuite dans les unités où $\ell = B = K = 1$.

4. À cause de la compression, la distance entre les deux extrémités de la membrane selon l'axe Oy est $W - \Delta$. Exprimer la contrainte d'inextensibilité en égalant Δ à une intégrale curviligne faisant intervenir $\cos\phi$.

5. Exprimer $\partial_s h$ en fonction de ϕ. On admettra qu'on peut traiter h et ϕ comme variables indépendantes à condition d'ajouter un terme $\int_A^B Q(s)(\partial_s h - \sin\phi)\mathrm{d}s$ à l'action. Quel est le rôle de $Q(s)$?

6. En déduire une action dont la minimisation selon ϕ et h donnera la solution du problème (en prenant en compte toutes les contraintes). Écrire le lagrangien $L(s, \phi, , \partial_s\phi, h, \partial_s h)$ le plus simple correspondant.

7. Calculer les impulsions conjuguées et le hamiltonien équivalent.

8. Exprimer les équations de Hamilton, et montrer que l'une se met sous la forme

$$\partial_s^3 \phi + \left(\frac{(\partial_s\phi)^2}{2} + P\right)\partial_s\phi + h = 0 \tag{2}$$

où P est un coefficient dont on justifiera la présence.

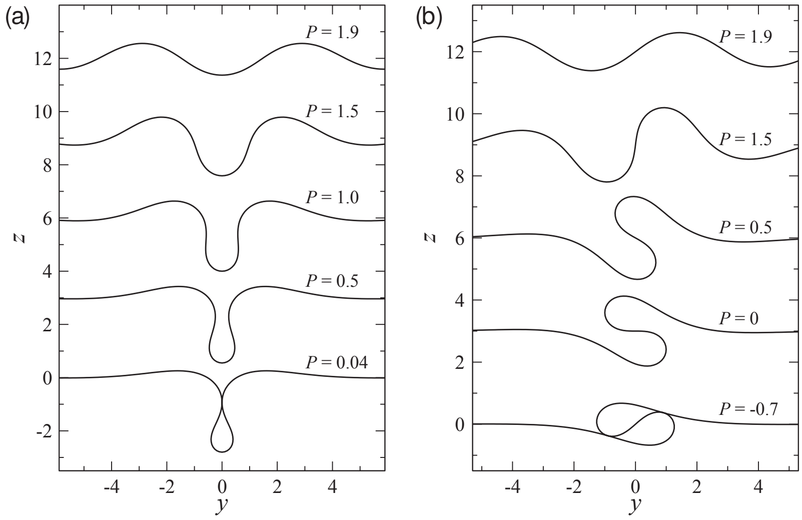
9. En déduire une équation d'ordre 4 uniquement en fonction de ϕ.

10. Intégrer une première fois cette équation, montrer qu'elle se met sous la forme

$$\partial_s^3\phi\,\partial_s\phi - \frac{1}{2}(\partial_s^2\phi)^2 + f(\partial_s\phi)\frac{(\partial_s\phi)^2}{2} + 1 - \cos\phi = 0 \tag{3}$$

avec $f(\partial_s\phi)$ une fonction polynomiale d'ordre 2 à déterminer.

Il est possible de résoudre explicitement cette équation, mais la méthode est assez pénible. Ci-dessous sont représentées différentes solutions pour cette équation. Pour des P proches de la valeur critique 2, on observe un profil sinusoïdal. Cependant, lorsque P diminue, c'est-à-dire lorsque Δ augmente, le profil change et toute la déformation se concentre au centre du profil.



2 Couplage gyroscopique (*les calculs sont un peu longs*)

On considère le pendule double représenté figure 3. Les masses m_1 et m_2 sont reliées par des barres solides de longueur l et de masse négligeable. Les deux pendules sont astreints à osciller dans des plans perpendiculaires. Leurs angles par rapport à la verticale sont respectivement θ_1 et θ_2. L'ensemble du dispositif est en rotation autour de l'axe vertical $0z$, (angle $\phi(t)$). On note $\mu^2 = m_2/(m_1+m_2)$. L'accélération de la pesanteur est notée g.

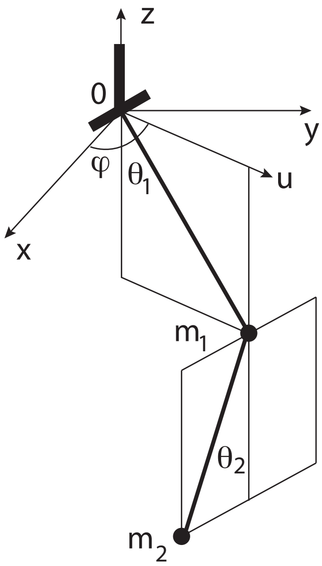


FIGURE 1 – Couplage gyroscopique

1. Donner les expression des coordonnées des masses m_1 et m_2 en fonction de l, θ_1, θ_2 et $\phi(t)$.
2. Donner l'expression du Lagrangien
3. Écrire les équations de Lagrange pour θ_1 et θ_2.
4. On suppose que le dispositif tourne à vitesse angulaire constante $\dot{\phi} = \Omega$ et que les pendules sont initialement suivant la verticale. Linéariser les équations de Lagrange dans la limite θ_1 et θ_2 petits. Montrer que l'on obtient les équations

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\Omega^2 - \frac{g}{l}\right)\theta_1 - 2\mu^2\Omega\,\dot{\theta}_2, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta}_2 = 2\Omega\,\dot{\theta}_1 + \left(\Omega^2 - \frac{g}{l}\right)\theta_2. \quad (5)$$

5. Chercher les solutions pour θ_1 et θ_2 en $\exp st$. Donner l'équation pour s et indiquer la localisation dans le plan complexe des solutions pour s dans le cas où Ω est faible. Montrer que lorsque Ω atteint une valeur critique Ω_c, la solution $\theta_1 = \theta_2 = 0$ devient instable. Comment sont les solutions pour s dans le plan complexe lorsque $\Omega = \Omega_c$?