Alexis BRES & Arnaud RAOUX (prenom.nom@ens.fr)

Propriétés des courbes 2D

1 Définitions

On paramètre en général les courbes (ou arc) par une fonction f d'un intervalle I (souvent $[0,1]$) dans le plan $\mathbb{R}^2$. $f(t)$ est un point sur la courbe, noté $M(t)$.

Exemples :

— Coordonnées cartésiennes : $f(t) = (x(t), y(t))$

— Coordonnées polaires : $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ (à condition que $f(t) \neq 0$).

2 Longueur d'un arc

La longueur d'un arc sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ s'écrit par définition

$$\boxed{L_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(t)||\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Propriété importante : cette longueur ne dépend pas du choix du paramétrage f ! C'est une propriété intrinsèque de la courbe.

Exemples :

— Coordonnées cartésiennes : $||f'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

— Coordonnées polaires : $||f'(t)|| = \sqrt{\rho(t)^2 + \rho'(t)^2}$

3 Abscisse curviligne

On définit une *abscisse curviligne* comme une fonction $s : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = ||f'(t)|| \tag{2}$$

Cette définition est faite sur mesure pour avoir

$$L_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(t)||\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathrm{d}s \tag{3}$$

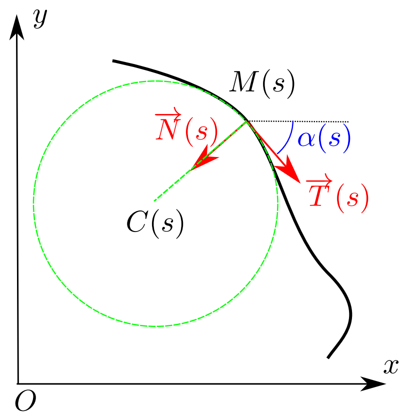
ou de façon infinitésimale : $\boxed{\mathrm{d}L = \mathrm{d}s}$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}s$ est la longueur élémentaire.

Exemples :

— Coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$

— Coordonnées polaires : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2$

Très souvent on choisit comme paramétrage l'abscisse curviligne. On considère donc directement $M(s)$.



4 Repère de Frénet

Sur une courbe, on utilise un repère mobile d'origine $M(s)$. On choisit un vecteur tangent unitaire $\boldsymbol{T}(s)$ au point $M(s)$, et le vecteur unitaire orthogonal à $\boldsymbol{T}(s)$, orienté dans la concavité de la courbe $\boldsymbol{N}(s)$.
Ce trièdre $(M(s), \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s))$ forme une base orthonormée, et constitue le *repère de Frénet*.
Soit $\alpha(s)$ l'angle entre l'axe horizontal Ox et $\boldsymbol{T}(s)$.

5 Courbure d'un arc paramétré

Comme $\boldsymbol{T}(s)$ est unitaire, sa dérivée est selon $\boldsymbol{N}(s)$. De plus, vu le choix de $\boldsymbol{N}(s)$, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}(s) = \gamma(s)\boldsymbol{N}(s)} \tag{4}$$

avec $\gamma(s)$ un coefficient positif. $\gamma(s)$ est la *courbure* au point $M(s)$, et on appelle *rayon de courbure* son inverse $R(s) = 1/\gamma(s)$.
De même, la dérivée de $\boldsymbol{N}(s)$ est selon $\boldsymbol{T}(s)$. On montre que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}(s) = -\gamma(s)\boldsymbol{T}(s) \tag{5}$$

Formulé autrement, on a

$$\gamma(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(s) \tag{6}$$

On appelle *centre de courbure* le point $C(s)$ tel que

$$\boldsymbol{MC}(s) = R(s)\boldsymbol{N}(s) \tag{7}$$

Il arrive qu'on rencontre une *développée* d'une courbe (en optique par exemple). C'est l'ensemble des centres de courbure mis « bout à bout ».

6 Interprétation cinématique

On peut exprimer la vitesse et l'accélération d'un mobile d'un mobile dans cette base de Frénet. Pour la vitesse

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{dt} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}(s) = v\boldsymbol{T}(s) \tag{8}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse du mobile au point s.
Pour l'accélération

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{dt^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}(s) + v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}(s) + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}(s) \tag{9}$$

On retrouve les expressions de l'accélération tangentielle $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ et de l'accélération centripète v^2/R.