Compléments et définitions de magnétisme

Arnaud Raoux

20 octobre 2018

1 Approche macroscopique du magnétisme

1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \tag{1}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{E} = -\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{4}$$

avec $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ les **champ électrique** et **champ magnétique**. Les deux premières sont des équations de structure reliant les deux champs, les deux dernières relient les champs à leurs sources (charges et courants).

Dans la suite on se place en régime statique où les comportements électrique et magnétique sont décorrélés, et on ne considère que les effets magnétiques.

1.2 Magnétisme dans la matière

Le moment magnétique d'un système est définit simplement comme la somme des moments magnétiques microscopiques : $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \sum_i \overrightarrow{\mu_i}$.

On définit l'**aimantation** $\overrightarrow{M}$ d'un système comme le moment magnétique par unité de volume :

$$\overrightarrow{M} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{M}}}{\mathrm{d}V} \tag{5}$$

1.3 En l'absence de champ magnétique

Un matériau quelconque (gaz, liquide, solide, etc.) peut, en l'absence de champ extérieur, avoir différents comportements magnétiques :

1. ne pas avoir de moments dipolaires microscopiques (si tous les atomes ont des couches électroniques remplies par exemple) ;
2. avoir des moments dipolaires microscopiques, mais d'orientation aléatoire ;
3. avoir des moments dipolaires microscopiques, dont les moments sont tous alignés dans des domaines microscopiques (de volume typique 1 $\mu\mathrm{m}^3$), mais l'orientation de chaque domaine est aléatoire ;
4. avoir des moments magnétiques microscopiques qui sont tous (plus ou moins) alignés dans la même direction.

Seul un matériau dans la dernière situation présente un moment magnétique total (spontané) non nul, et donc une aimantation spontanée $\overrightarrow{M}_{\text{spon}}$.

Les situations 3 et 4 se produisent lorsqu'il existe des interactions microscopiques (quantiques) entre les différents moments magnétiques. Dans ces deux cas, le système est dit **ferromagnétique**. Cela nécessite d'avoir une distance très petite entre les moments voisins, pour cette raison seuls des solides présentent du ferromagnétisme. De plus, l'interaction est très dépendante des orbitales atomiques en jeu : seuls certains solides peuvent être ferromagnétiques.

Les situations 1 et 2 correspondent à des matériaux qui vont répondre faiblement à un champ magnétique extérieur. Ce sont les para et diamagnétiques, où les interactions entre moments magnétiques sont faibles ou nulles. On se place dans ce cas par la suite.

1.4 Excitation magnétique

Supposons que l'on cherche à imposer un champ magnétique dans un matériau en le plaçant dans un solénoïde. Le champ créé par le solénoïde est bien connu. Mais si le système a une aimantation $\overrightarrow{M}$, il va aussi contribuer au champ total présent à l'intérieur du matériau.

Pour séparer l'effet « externe » des courants et l'effet « interne » des moments, on introduit souvent un nouveau vecteur **excitation magnétique** noté $\overrightarrow{H}$ tel que

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} \tag{6}$$

Le champ $\overrightarrow{H}$ pourrait donc être compris comme le champ magnétique imposé par l'extérieur (à une constante μ_0 près). On retiendra la formule

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}\right)} \tag{7}$$

Dans le vide, $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$, donc les deux champs sont simplement proportionnels : $\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{H}$.

1.5 Magnétisme induit

Si on applique un champ magnétique sur un système non-ferromagnétique (sans aimantation spontanée), celui-ci, par différents phénomènes microscopiques, va répondre à cette excitation en créant une aimantation $\overrightarrow{M}_{\text{ind}}$.

L'aimantation étant une réponse au champ extérieur, on définit la **susceptibilité magnétique** par

$$\overrightarrow{M}_{\text{ind}} = \chi_m \overrightarrow{H} \tag{8}$$

Si $\chi_m > 0$, le système est dit **paramagnétique**, sinon il est **diamagnétique**. [1]

Le champ magnétique à l'intérieur du matériau s'écrira donc :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}_{\text{ind}}\right) = \mu_0\left(1+\chi_m\right)\overrightarrow{H} \tag{9}$$

Si le matériau est diamagnétique, alors le champ à l'intérieur est inférieur au champ qui régnerait dans le vide ($\mu_0\overrightarrow{H}$). S'il est paramagnétique, le champ est renforcé.

En pratique, les susceptibilités sont toujours telles que $|\chi_m| \ll 1$, la réponse des matériaux para et diamagnétiques est donc très faible.

2 Approche microscopique

2.1 Moment fixe dans un champ extérieur

Revenons au cas d'un unique moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ imposé. Celui va réagir au champ car il subit une force et un moment

$$\overrightarrow{F} = \left(\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{B} \tag{10}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B} \tag{11}$$

1. On relie souvent para et diamagnétisme qui sont des réponses macroscopiques à des comportements microscopiques (un électron célibataire ou non par exemple), mais il faut être prudent : il existe de nombreux mécanismes pouvant contribuer positivement ou négativement à la susceptibilité, et donc changer le signe total de χ_m.

Si le champ magnétique est uniforme, la force est nulle. Le moment ne subit qu'un couple. Contrairement au cas électrique, le couple ne le fait pas s'aligner avec le champ, mais précesser autour du vecteur $\overrightarrow{B}$.

Si le champ est inhomogène, alors le moment est attiré par les champs forts.

Dans l'expression (10), on peut faire rentrer $\overrightarrow{\mu}$ dans le gradient [2], et obtenir une énergie potentielle pour un moment fixe

$$E_\mathrm{p} = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B} \tag{12}$$

2.2 Moment induit dans un champ extérieur

On applique un même champ magnétique sur un système, mais présentant un moment nul en champ nul. Le champ magnétique va créer un moment induit $\overrightarrow{\mu}_\mathrm{ind} = \alpha \overrightarrow{B}$. Parce que le moment dépend de $\overrightarrow{B}$, deux choses changent par rapport au cas d'un moment fixe :

1. l'énergie potentielle (12) est modifiée : rentrer le vecteur $\overrightarrow{\mu} = \alpha \overrightarrow{B}$ sous le gradient fait intervenir un facteur $\frac{1}{2}$:
$$E_\mathrm{p} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B} \tag{13}$$
2. la force subie dans un champ inhomogène est donc $\propto \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\overrightarrow{B}^2)$. Le moment se déplace donc pas nécessairement vers les forts champs, mais simplement les gradients de champs.

2.3 Origine microscopique du magnétisme

À venir...

2. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{g}rad\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{g}rad\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{a}$