

Électromagnétisme et Optique
– LU3PY121 –

9 ECTS

Poly de cours

2023-2024

Dans ce manuscrit, vous retrouverez certaines structures mises en évidence :

- chaque chapitre et certaines parties commencent par une mise en avant des objectifs de ce qui va être présenté. Cela permet également de donner un contexte d'utilisation de ces notions.
- les définitions importantes sont isolées dans des encadrés *verts*. Si elles ne sont pas à connaître mot-à-mot, ces définitions sont cruciales pour la compréhension du cours.
- les résultats importants ou des synthèses sont mis en évidence dans des encadrés rouges. Il est important de les comprendre, les connaître, et savoir les utiliser.
- Les formules encadrées sont à connaître (définitions) ou à savoir redémontrer (résultats).
- Des encadrés supplémentaires à caractère mathématique rappellent les méthodes générales utiles en physique, ou démontrent des résultats utilisés dans le corps du texte.
- à la fin de chaque section, un encadré « Compétences à maîtriser » regroupe les compétences sur lesquelles reposeront les évaluations de l'UE.
- certains paragraphes identifiés par (★) sont facultatifs. Ils permettent une meilleure compréhension globale, mais aucune connaissance ou compétence sur ces notions n'est attendue pour l'évaluation de l'UE. Vous pouvez donc les passer en première lecture.

Ce manuscrit est écrit par Arnaud Raoux, largement adapté du manuscrit de Jean-Hugues Fillion, Nicolas Sandeau et Laurent Philippe.



This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License. This license lets others remix, adapt, and build upon your work non-commercially, as long as they credit you and license their new creations under the identical terms.

Table des matières

1 Ondes électromagnétiques dans le vide	5
1 La propagation des ondes	5
2 Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques	17
3 Polarisation d'une OPPH électromagnétique	29
2 Émission dipolaire et diffusion	39
1 Petit aparté : résoudre les équations de Maxwell ?	39
2 Développement multipolaire	42
3 Rayonnement dipolaire	48
4 Diffusion de la lumière par un milieu	53
3 Propagation dans les milieux L.H.I.	59
1 Polarisation de la matière	60
2 Aimantation de la matière	71
3 Équations de Maxwell dans les milieux matériels	72
4 Propagation dans les milieux L.H.I. non chargés	73
4 Interfaces, réflexion et transmission	85
1 Relations de passage	86
2 OPPH à l'interface entre deux milieux : position du problème	87
3 Conservation de la pulsation	89
4 Lois de Descartes	90
5 Coefficients de Fresnel	91
6 Propagation guidée	100
7 Annexe : démonstration des relations de passage (★)	105
5 Interférences lumineuses	109
1 Sources lumineuses et détecteurs en optique	110
2 Conditions d'interférences et formule de Fresnel	116
3 Obtenir deux sources cohérentes	122
4 Au-delà de la source ponctuelle monochromatique	132
5 L'interféromètre de Fabry-Pérot (★)	138
6 Diffraction	141
1 Le principe de Huygens-Fresnel	141
2 La tache de Fresnel-Arago	143
3 Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer	144
4 Diffraction par une fente	147
5 Diffraction par plusieurs motifs identiques	150

7	Propagation dans les milieux anisotropes	155
1	Propriétés des ondes dans les milieux anisotropes	155
2	Propagation selon un axe principal	157
3	Propagation selon un axe quelconque	160
4	Onde plane dans un milieu uniaxe	162
5	Annexe 1 : Surface des indices (★)	164
6	Annexe 2 : Tracés de rayons lumineux et de vecteurs d'onde (★)	166

Chapitre 1

Les équations de Maxwell et les ondes électromagnétiques dans le vide

Sommaire

1	La propagation des ondes	5
1.1	Équation de propagation	6
1.2	Solutions unidimensionnelles	7
1.3	Ondes planes (homogènes) progressives harmoniques	10
2	Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques	17
2.1	Les équations de Maxwell dans le vide	17
2.2	Approche mésoscopique	18
2.3	Propriétés et formes globales des équations de Maxwell	19
2.4	Propagation de l'énergie	22
2.5	Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	24
2.6	OPPH électromagnétiques dans le vide	25
2.7	Énergie électromagnétique et puissance transportée par une OPPH	27
3	Polarisation d'une OPPH électromagnétique	29
3.1	Polarisation rectiligne	30
3.2	Polarisation circulaire	30
3.3	Cas général	32
3.4	Lumière naturelle	33
3.5	Polariseurs	34
3.6	Notion de lame à retard	36
3.7	Intérêt et utilisation des ondes polarisées	36

Objectifs

Dans cette partie, nous allons réintroduire les notions fondamentales nécessaires à ce cours, à savoir la propagation des ondes vérifiant l'équation de d'Alembert et les lois de l'électromagnétisme (les équations de Maxwell). Cela permettra d'introduire plus particulièrement la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Nous concluons sur la notion de polarisation des ondes électromagnétiques, et sur les éléments optiques capables de la modifier.

1 La propagation des ondes *in short*

On appelle *onde* un signal qui dépend à la fois de l'espace et du temps. Cette vibration décrit par une fonction scalaire ou vectorielle, vérifie une équation différentielle appelée *équation d'onde*.

Au passage, on rappelle la notion de surface d'onde :

Définition

On appelle **surface d'onde** l'ensemble des points qui ont la même phase à un instant t donné. On s'intéressera par la suite essentiellement aux ondes planes et sphériques, dont les surfaces d'onde sont respectivement des plans et des sphères.

1.1 Équation de propagation

Que ça soit une onde se propageant sur une corde de guitare, une onde sismique, une onde wifi ou de la lumière dans le vide comme nous le verrons par la suite, leur propagation est décrite par une équation aux dérivées partielles fondamentale, qui couple l'espace et le temps.

Équation de d'Alembert

Si $f(\vec{r}, t)$ est une perturbation qui dépend du point \vec{r} de l'espace à l'instant t , elle vérifie l'équation de d'Alembert si

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = 0}. \quad (1.1)$$

La constante c est homogène à une vitesse, on la nomme **célérité**. Nous allons voir que dans le cas de l'équation de d'Alembert, elle caractérise la vitesse de propagation de l'onde (ce qui n'est pas vrai pour une équation d'onde plus générale).

Remarque Dans le cas des ondes se propageant sur une corde de guitare, la vitesse c s'écrit $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la tension de la corde et μ sa masse linéique. Pour la propagation d'une onde sonore dans un gaz parfait, on a $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$ avec γ le rapport des capacités thermiques, P_0 la pression du gaz et ρ sa masse volumique.

Remarque Nous verrons qu'un champ vectoriel $\vec{F}(\vec{r}, t)$ peut aussi vérifier l'équation de d'Alembert. Dans ce cas il s'agit de l'opérateur « laplacien vectoriel ».

Rappels sur les propriétés des laplaciens

L'opérateur **laplacien scalaire** appliqué à un champ **scalaire** $f(M)$ est défini par

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f). \quad (1.2)$$

En coordonnées cartésiennes, il s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.3)$$

L'opérateur **laplacien vectoriel** appliqué à un champ vectoriel $\vec{F}(M)$ est défini par

$$\Delta \vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{F}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F}). \quad (1.4)$$

En coordonnées cartésiennes, il s'écrit donc

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z \quad (1.5)$$

avec $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les trois vecteurs unitaires formant le repère cartésien et F_x, F_y et F_z les trois coordonnées de \vec{F} dans le repère cartésien. Remarquons que la i^{e} coordonnée s'écrit comme un produit scalaire $F_i = \vec{F} \cdot \vec{u}_i$.

Remarque : Attention de ne pas confondre l'opérateur laplacien qui utilise un Delta majuscule (Δ) avec l'application nabla notée $\vec{\nabla}$. Cette application nabla permet d'écrire de façon unifiée tous les opérateurs d'analyse vectorielle : pour un champ vectoriel \vec{F} , il permet de représenter la divergence ($\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$), le rotationnel ($\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$) et le laplacien vectoriel ($\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F}$); et pour un champ scalaire f , le gradient ($\text{grad } f = \vec{\nabla} f$) et le laplacien ($\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$). Cette notation est souvent utilisée dans les pays anglo-saxons. Cependant pour éviter certaines confusions avec des changements de coordonnées, nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

1.2 Solutions unidimensionnelles

L'équation de d'Alembert est *a priori* vraie pour une perturbation dépendant des trois variables d'espace et du temps, pour cette raison on l'appelle « équation 3D ». Celle-ci est une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles d'ordre 2, impossible à résoudre explicitement.

En pratique, les signaux qui nous intéressent principalement ne dépendent que d'une variable d'espace, que ça soit une variable cartésienne (x, y ou z) ou de la distance à un point source r .

Définition

On appelle onde **unidimensionnelle** une onde décrite par une fonction qui ne dépend que d'une variable d'espace.

Cette définition englobe les ondes qui se propagent dans des milieux unidimensionnels (comme une corde), mais aussi des propagations 2D ou 3D. L'onde plane et l'onde sphérique sont des exemples d'ondes unidimensionnelles à 3D.

Ondes progressives

On se place dans le cas où l'onde ne dépend que d'une variable cartésienne, par exemple z . L'équation de d'Alembert se simplifie alors en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (1.6)$$

On montre que les solutions générales s'écrivent sous la forme :

$$f(z, t) = g\left(t - \frac{z}{c}\right) + h\left(t + \frac{z}{c}\right). \quad (1.7)$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, remarquons que l'équation différentielle a la forme d'une identité remarquable $a^2 - b^2$. On peut factoriser l'équation différentielle exactement comme une équation algébrique :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\right). \quad (1.8)$$

À cette expression, on devine que les variables $u = z - ct$ et $v = z + ct$ semblent particulièrement pertinentes. On fait donc un changement de variables, en définissant

$$\tilde{f}(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right). \quad (1.9)$$

Calculons la dérivée de \tilde{f} par rapport à u grâce à la règle de la chaîne :^a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) \quad (1.10)$$

puis la dérivée par rapport à v :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \quad (1.11)$$

Puisque f vérifie l'équation de d'Alembert, cette dérivée seconde est nulle. On a ainsi par intégration successive :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v} = 0 \implies \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = C(u) \implies \tilde{f}(u, v) = \int C(u) + D(v). \quad (1.12)$$

Ainsi

$$a. \text{ La règle de la chaîne : } \frac{df}{dt} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

La forme de ces solutions est remarquable. Vérifier l'équation d'onde a imposé à la fonction à deux variables $f(z, t)$ de s'écrire comme la somme de deux fonctions à une variable ! Les variables de temps et d'espace ne peuvent donc apparaître qu'ensemble, sous la forme $t \pm \frac{z}{c}$. C'est aussi la « seule » contrainte. L'équation n'impose rien sur les fonctions g et h , elles seront déterminées par les conditions aux limites.

Définition

Les ondes g et h sont appelées des **ondes progressives** : l'argument de chacune des fonctions couple temps et espace, ce qui implique que l'onde se propage.

Vitesse de propagation Supposons par exemple qu'on s'intéresse à la propagation d'une impulsion (cf. fig. 1.1) initialement en $z = z_1$ à $t = t_1$. Les coordonnées des points où l'on retrouvera l'impulsion pour la fonction g (resp. h) vérifient $t - z/c = t_1 - z_1/c$ (resp. $t + z/c = t_1 + z_1/c$). On en déduit que l'impulsion se déplace selon les z croissants (resp. décroissants) à la vitesse

$$v = \frac{z - z_1}{t - t_1} = c \quad (\text{resp. } v = -c) \quad (1.13)$$

La constante c correspond donc tout simplement à la (norme de la) vitesse de propagation d'une onde progressive. On notera que cela correspond à une propagation *sans déformation ni atténuation*.

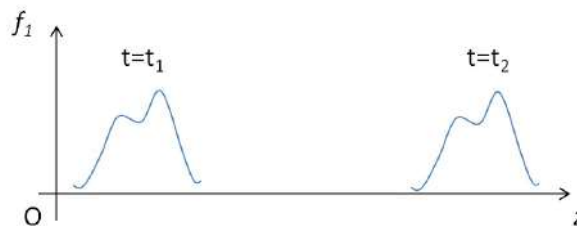


FIGURE 1.1 – Représentation spatiale d'une perturbation (ici une impulsion) à différents instants ($t_2 > t_1$); l'onde se propage sans déformation ni atténuation.

On pourrait généraliser le résultat d'une onde progressive selon la direction z décrit dans ce paragraphe à la propagation selon une direction quelconque dirigée par le vecteur \vec{u} . L'expression d'une telle onde serait

$$f(\vec{r}, t) = g\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + h\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right). \quad (1.14)$$

Remarque Les fonctions g et h sont séparément des ondes progressives. Mais la somme n'est pas progressive. L'exemple frappant est celui des ondes stationnaires qui peuvent s'écrire comme la somme de deux ondes progressives contra-propageantes.

Ondes sphériques progressives

Définition

Une **onde sphérique** est une solution de l'équation de d'Alembert à 3D pour laquelle f ne dépend que de la distance $r = OM$ à l'origine du repère. On va montrer que l'amplitude d'une telle onde décroît en $1/r$.

En coordonnées sphériques pour une fonction qui ne dépend que de r , le laplacien s'écrit $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial f}{\partial r}] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rf]$. L'équation de propagation devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rf] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (1.15)$$

soit après multiplication par r ,

$$\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

La fonction rf satisfait donc à la même équation que dans le cas d'une variable cartésienne z , et peut donc s'écrire comme la somme de deux ondes progressives. On en déduit pour f :

$$f(r, t) = \frac{1}{r} g\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} h\left(t + \frac{r}{c}\right). \quad (1.17)$$

Le premier terme traduit une onde sphérique divergente de centre O , le second terme une onde sphérique convergente vers O , comme représentées figure 1.2.

Cette expression est satisfaisante car plus on s'éloigne de l'épicentre de l'onde, plus l'amplitude de l'onde décroît. Cela ne signifie pas que l'onde est absorbée par le milieu ou qu'il y a une perte d'énergie, simplement qu'à cause de l'augmentation de la surface du front d'onde, l'amplitude en un point va décroître. Cela assure que l'énergie de l'onde est bien conservée.

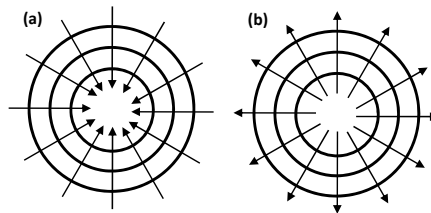


FIGURE 1.2 – Représentation en deux dimensions d'une onde sphérique convergente (a) et divergente (b).

Remarque On s'est intéressé ici à deux cas particuliers d'onde ne dépendant que d'un paramètre d'espace, mais il existe autant de situations que de systèmes de coordonnées. Par exemple dans un problème à deux dimensions écrit en coordonnées polaires, on peut chercher des solutions qui ne dépendent que de la distance à l'origine r . Parce que c'est un problème 2D et non 3D, le laplacien change d'expression, et on montre alors que f ressemble à une onde sphérique, mais avec une amplitude en $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Ondes stationnaires

Aux ondes progressives (donc qui se propagent) s'opposent les ondes stationnaires.

Définition

On appelle **onde stationnaire** une onde pour laquelle les termes temporel et spatial sont découplés dans la phase de l'onde, par exemple sous la forme $f(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$. Il n'y a pas de propagation

de la perturbation, c'est donc « l'inverse » d'une onde progressive.

On vérifiera que les ondes stationnaires comme les ondes progressives sont solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. Grâce au théorème de Fourier, on peut montrer que toute solution peut se décomposer comme une somme d'ondes stationnaires. Celles-ci forment donc une base de solutions tout aussi intéressante que les ondes progressives. On choisira l'une ou l'autre selon la situation qui se présente. ¹

1.3 Ondes planes (homogènes) progressives harmoniques

1.3.1 Définition d'une OPHPH

Les ondes progressives décrites précédemment sont des solutions très générales de l'équation de d'Alembert. Afin d'aller plus loin dans l'étude de ces solutions, on introduit la notion centrale d'OPPH, qui est un cas particulier d'onde progressive.

Définition d'une OPHPH

Plane Une onde est *plane* si ses surfaces d'onde sont des plans. La phase de l'onde ne dépend en particulier que d'une seule variable spatiale : une onde plane est une onde unidimensionnelle ;

Homogène Une onde plane *homogène* est une onde plane dont l'amplitude est constante sur ses surfaces d'onde. Cette propriété est souvent implicite, et on tendra à ne pas le rappeler par la suite. On précisera au contraire lorsqu'une onde n'est *pas* homogène.

Progressive Une onde *progressive* est une onde dont la phase couple position et temps, dont la perturbation progresse dans le temps. À opposer à une onde stationnaire.

Harmonique Une onde *harmonique* (terme emprunté à l'acoustique) est une onde possédant une unique fréquence. On dit aussi qu'elle est *monochromatique* ou sinusoïdale.

Une onde vérifiant l'ensemble de ces propriétés sera appelée une OPHPH, ou plus simplement *OPPH* en « oubliant » le H de homogène. Une telle onde $f(\vec{r}, t)$ se propageant dans la direction \vec{u} peut s'écrire de façon générale :

$$f(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \quad (1.18)$$

La quantité $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0$ est appelée la *phase* de l'onde, avec $\vec{k} = k\vec{u}$ le vecteur d'onde et \vec{u} la direction de propagation de l'onde.

Avec l'expression (1.18), on peut vérifier que les surfaces d'ondes sont des plans : à t fixé, la phase est la même pour tous les points M vérifiant $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cste}$. Autrement dit, si on fixe un point M , les points P en phase avec M vérifient $\vec{k} \cdot \vec{OP} = \vec{k} \cdot \vec{OM}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{PM} = 0$. Ceci est l'équation d'un plan, orthogonal à \vec{u} .

Remarque Il y a plusieurs conventions : certaines définitions définissent une onde plane comme devant être plane ET homogène d'après la nomenclature précédente, c'est-à-dire que les surfaces d'onde doivent être des plans, et que l'amplitude doit être constante sur ces plans.

1.3.2 Représentations de l'onde sinusoïdale

L'OPPH est une fonction sinusoïdale de l'espace et du temps. Il est difficile de représenter l'onde dans le temps et l'espace simultanément. On peut soit choisir de représenter l'onde dans le temps en un point de l'espace, soit prendre une « photographie » de l'onde à un instant t donné. Dans le premier cas, la grandeur utile est la pulsation temporelle ω reliée à la période caractéristique temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dans le second, la grandeur utile

1. Si on cherche une solution qui se propage, on l'écrira plutôt comme une onde progressive. Si on cherche la forme d'une onde confinée dans une zone de l'espace on l'écrira plutôt comme une somme d'ondes stationnaires.

est la pulsation spatiale k (la norme du vecteur d'onde) reliée à la période caractéristique spatiale λ appelée **longueur d'onde** définie par : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Lorsque le temps s'écoule de Δt , la phase a changé de $\omega \Delta t$. Et de même si on progresse spatialement de Δx , la phase a changé de $k \Delta x$.

	Oscillations temporelles à M fixé	Oscillations spatiales à t fixé
Pulsation	ω	$k = \ \vec{k}\ $
Fréquence	$f = \frac{\omega}{2\pi}$	$\sigma = \frac{k}{2\pi}$ (nombre d'onde)
Période	$T = \frac{1}{f}$	$\lambda = \frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi}{k}$ (longueur d'onde)
Lien	$k = f(\omega)$ (relation de dispersion)	

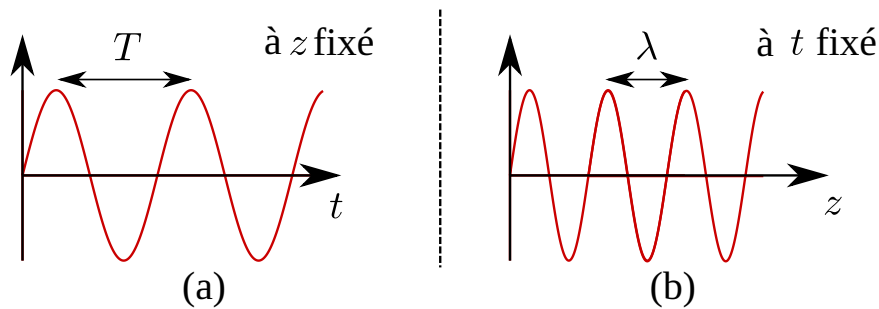


FIGURE 1.3 – Représentations temporelle (a) et spatiale (b) d'une OPPH. Une OPPH présente une double périodicité, spatiale et temporelle.

Notations complexes

Pour simplifier les calculs, on utilise la plupart du temps la notation complexe.^a Cette approche est décrite dans la vidéo de cours associée sur Moodle.^b Pour une OPPH $f(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)$, on définit la quantité

$$\underline{f}(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} = \underline{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.19)$$

où $\underline{A} = A e^{i\varphi_0}$ est appelée l'**amplitude complexe** de l'onde, et contient des informations sur l'amplitude et la phase à l'origine.

L'onde physique se retrouve en faisant : $f(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{f}(\vec{r}, t))$.

Nous avons adopté la convention d'écriture $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, mais le choix $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ possède exactement la même partie réelle. Ces deux notations sont strictement équivalentes et ce choix n'a pas d'importance pour le résultat final, cependant il peut influencer les calculs intermédiaires. *On gardera cette convention dans tout ce cours.*

Concrètement, on remplacera donc dans tous les calculs intermédiaires f par \underline{f} , et on prendra la partie réelle à la toute fin du calcul.

Cas des quantités quadratiques L'utilisation des complexes est intimement lié au caractère linéaire des quantités et équations que l'on manipule, pour que la partie réelle commute avec ces opérateurs. Il n'est donc pas possible d'utiliser la notation complexe pour calculer des quantités quadratiques comme

les grandeurs énergétiques (puissance, vecteur de Poynting, etc.). Il est conseillé de toujours revenir aux champs réels pour ces calculs.

Pour information, pour calculer la moyenne temporelle d'une grandeur quadratique, il est possible d'utiliser la formule pratique ci-dessous.

Moyenne d'une grandeur quadratique en notations complexes

Si $a(t)$ et $b(t)$ sont deux grandeurs périodiques temporellement, et si on cherche à déterminer la valeur moyenne du produit, on peut utiliser directement leur représentation complexe :

$$\langle a b \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(a b^*) \quad (1.20)$$

a. Dans ce polycopié, on note les nombres complexes \underline{z} et les complexes conjugués \underline{z}^* .

b. <https://moodle-sciences-23.sorbonne-universite.fr/mod/page/view.php?id=2173>

Par la suite, on choisira l'axe (Oz) comme axe de propagation de l'OPPH avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$, pour simplifier les calculs. Nous reviendrons aux expressions générales afin d'avoir des formules indépendantes du repère.

1.3.3 Relation de dispersion

Une équation d'onde est une équation aux dérivées partielles en t et \vec{r} que vérifie le signal f . Rechercher des solutions particulières sous la forme d'OPPH permet de transformer cette équation différentielle en une équation algébrique qui relie le vecteur d'onde k et la pulsation ω pour que cette OPPH soit solution. L'équation algébrique caractérise complètement l'équation d'onde. En optique et en électromagnétisme, la caractéristique fondamentale étant ω , on écrira la relation sous la forme $k = k(\omega)$. Cette relation peut imposer à k d'être complexe, on le notera \underline{k} .

Définition

La **relation de dispersion** est une équation algébrique $\underline{k} = \underline{k}(\omega)$, déterminée en cherchant une OPPH solution de l'équation de propagation aux dérivées partielles.

Le vecteur d'onde \underline{k} ainsi déterminé dépend de ω , et peut être complexe. On le décompose sous la forme $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$.

Cas de l'équation de d'Alembert Cherchons la relation de dispersion dans le cas de l'équation de d'Alembert, avec $\underline{f}(\vec{r}, t) = \underline{A} e^{i(kz - \omega t)}$:

$$\Delta \underline{f} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} = \left[-k^2 - \frac{-\omega^2}{c^2} \right] \underline{f} = 0 \quad (1.21)$$

soit la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (\text{équation de d'Alembert}). \quad (1.22)$$

On en déduit que $k(\omega) = \pm \frac{\omega}{c}$. Le vecteur d'onde est réel, et relié linéairement à la pulsation. En introduisant la longueur d'onde et la fréquence dans la relation précédente, on retrouve la relation $c = \lambda f$ bien connue. Attention, cette relation n'est vraie **que** pour une perturbation vérifiant l'équation de d'Alembert !

Cas général Dans le cas général d'une relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$, on peut écrire l'onde plane :

$$\underline{f}(\vec{r}, t) = \underline{A} e^{i(\underline{k}z - \omega t)} = \underline{A} e^{i(k'z + ik''z - \omega t)} = \underline{A} e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t)}. \quad (1.23)$$

En revenant en notation réelle :

$$f(\vec{r}, t) = A e^{-k''z} \cos(k'z - \omega t + \varphi_0). \quad (1.24)$$

On comprend avec cette expression que k' et k'' jouent des rôles très différents : k' fait partie de la phase de l'onde, alors que k'' vient modifier l'amplitude de l'onde.

1.3.4 Vitesse de phase

Définition

La **vitesse de phase** $v_\phi(\omega)$ est la vitesse à laquelle la surface d'onde d'une OPPH se déplace. Pour une relation de dispersion donnée $\underline{k}(\omega)$, celle-ci s'écrit :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}. \quad (1.25)$$

Considérons une OPPH se propageant selon l'axe z , nous allons faire un raisonnement analogue à celui de la détermination de la vitesse de déplacement d'une onde progressive. On fixe une position z_1 et un instant t_1 . On cherche z_2 pour lequel la phase ϕ est la même en t_2 qu'elle l'était en z_1 à t_1 . On obtient $kz_1 - \omega t_1 = kz_2 - \omega t_2$, ainsi la vitesse de déplacement s'écrit

$$v_\phi = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}, \quad (1.26)$$

résultat cohérent avec la définition précédente (ici k est supposé réel). Il est important de noter que cette vitesse dépend dans le cas général de ω . Différentes OPPH pourront donc se propager à des vitesses différentes.

Cas de l'équation de d'Alembert Pour les ondes vérifiant l'équation de d'Alembert, la vitesse de phase est particulièrement simple : en remplaçant k par la relation de dispersion, on obtient :

$$v_\phi(\omega) = c \quad (\text{équation de d'Alembert}). \quad (1.27)$$

Toutes les fréquences se déplacent à la même vitesse. Une onde possédant différentes fréquences se propagera donc sans se déformer. Lorsque la vitesse de phase est une constante, on dit que la propagation est **non dispersive**.

Remarque La vitesse de phase n'a pas de borne théorique. Pour l'équation de d'Alembert, elle est constante et vaut c , mais pour une autre équation d'onde, elle peut être inférieure ou supérieure à c la célérité de la lumière dans le vide. Cela est possible, car cette vitesse ne caractérise pas la vitesse de transport d'une information.

1.3.5 Atténuation et absorption d'une onde

Si \underline{k} possède une partie imaginaire non nulle, alors l'amplitude de l'onde $A e^{-k''z}$ est modifiée lors de sa propagation. Deux cas se présentent :

- $k'' < 0$: dans ce cas l'amplitude de l'onde augmente exponentiellement. Ça peut être le cas lors d'amplifications (par exemple dans un LASER), mais ce n'est possible que dans un système borné.
- $k'' > 0$ est le cas le plus fréquent : l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement : l'onde est **atténuée** exponentiellement.

Il faut bien séparer la notion d'**atténuation** de celle d'**absorption** d'une onde. Lorsqu'une onde est absorbée par un milieu, elle va être atténuée. En revanche, son amplitude peut diminuer au cours de la propagation pour plein d'autres raisons : il s'agit d'une onde sphérique (amplitude en $1/r$), d'une onde évanescence, la propagation a lieu avec une forte dispersion, etc. L'atténuation ne signifie pas nécessairement que le milieu a absorbé l'onde, et donc qu'il y a eu un transfert d'énergie.

Définition

On appelle **milieu transparent** un milieu qui ne présente pas d'absorption. On se placera dans ce cas dans

la suite, sauf mention explicite.

Vocabulaire On distingue :

- si k est imaginaire pur, soit $k' = 0$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} e^{-i\omega t}. \quad (1.28)$$

L'amplitude est atténuée dans la direction z mais il n'y a pas de propagation dans la direction z . On parle d'**onde évanescente**. Dans le cas général, on parlera d'onde évanescente lorsqu'il y a diminution de l'amplitude dans une direction selon laquelle l'onde ne se propage pas. L'onde évanescente pourra éventuellement se propager dans une autre direction perpendiculaire.

- Si $k' \neq 0$, alors la phase conserve une dépendance en k' . L'onde se propage, et son amplitude diminue (ou augmente) au cours de la propagation. On parle d'**onde atténuée** (ou **amplifiée**). Cette fois, la diminution de l'amplitude et la propagation se font dans la même direction.

1.3.6 Notion d'indice d'un milieu

Définition

Pour une relation de dispersion quelconque, on définit $\underline{n}(\omega)$ l'**indice** d'un milieu par la relation

$$\boxed{\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c}}. \quad (1.29)$$

Pourquoi cette définition ? La partie habituelle de la relation de dispersion a été factorisée (ω/c), et il ne reste que la partie qui s'écarte de la relation de d'Alembert. On peut ainsi réécrire la vitesse de phase d'une onde :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'} \quad (1.30)$$

L'indice \underline{n} dépendant en général de ω peut être une grandeur complexe, on l'écrit $n = n' + in''$.

- Si n est indépendant de ω et réel ($n'' = 0$), la propagation est non dispersive (propagation d'une onde sans déformation). C'est le cas du vide puisque $n = 1$.
- Si $n(\omega)$ est réel mais dépendant de ω , la propagation est dispersive non atténuée. C'est le cas d'un faisceau lumineux dans l'eau ou le verre. Tant que $n'' = 0$, le milieu est **transparent**.

On retiendra :

$$\begin{aligned} n' &\longleftrightarrow k' \longleftrightarrow \text{dispersion} \\ n'' &\longleftrightarrow k'' \longleftrightarrow \text{atténuation} \end{aligned}$$

1.3.7 Vitesse de groupe

Lorsqu'on s'intéresse à la propagation d'une onde physique, il ne s'agit jamais d'une OPPH. En général, il s'agit d'une impulsion assez compacte en temps et en espace. Si cette impulsion présente une fréquence principale, et que la plupart de son spectre est centré sur cette fréquence, on dit qu'il s'agit d'un **paquet d'onde**.

Un tel paquet d'onde s'écrirait comme une superposition d'OPPH :

$$f(z, t) = \int \tilde{f}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk. \quad (1.31)$$

Dans le cas d'un paquet d'onde, on peut développer la relation de dispersion $k(\omega)$ proche de ω_0 la pulsation centrale du paquet d'onde, sous la forme :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \dots \quad (1.32)$$

On pose $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0$. En se limitant à l'ordre 1, on peut écrire la fonction $f(z, t)$:

$$\begin{aligned} f(z, t) &= \int \tilde{f}(k) e^{i(kz - \omega_0 t - (k - k_0)v_g t)} dk \\ &= \underbrace{e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}}_{=\text{OPPH à } \omega_0} \times \underbrace{\int \tilde{f}(k) e^{i(\omega - \omega_0)(z/v_g - t)} dk}_{=g(z - v_g t)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'onde se décompose comme une OPPH à la fréquence centrale du paquet d'onde ω_0 multipliée par une fonction qui varie lentement et qui est donc une fonction enveloppe. Celle-ci se propage comme une onde propagative à la vitesse v_g .

Pour ce calcul, on a supposé :

- que le paquet d'onde est centré sur une pulsation principale ω_0 , et avec une extension $\Delta\omega \ll \omega_0$.
- que la relation de dispersion $k(\omega)$ ne varie pas trop vite proche de ω_0 (approximation à l'ordre 1), et *a fortiori* que la relation est bien définie et non divergente.

Définition

Soit un paquet d'onde de pulsation centrale ω_0 pour lequel le spectre s'étend sur une plage $\Delta\omega \ll \omega_0$. La vitesse de phase $v_\phi(\omega_0)$ donne la vitesse de propagation de la fréquence majoritaire, mais pas le déplacement global du paquet d'onde (son enveloppe). Le calcul précédent montre que la vitesse de déplacement du paquet d'onde centré sur la pulsation ω_0 est la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}. \quad (1.33)$$

Cas de l'équation de d'Alembert La relation de dispersion étant linéaire dans ce cas, on a simplement : $v_g(\omega) = c$. La vitesse de groupe est indépendante de la pulsation centrale du paquet d'onde ω_0 , ce qui est naturel puisque toutes les fréquences se déplacent à la même vitesse ($v_\phi = \text{cste}$).

Cas général Pour une équation d'onde quelconque, les vitesses de phase et de groupe ne sont pas identiques, et leur interprétation est complètement différente. La vitesse de phase quantifie la vitesse d'une OPPH (ou de l'OPPH majoritaire dans un paquet d'onde), alors que la vitesse de groupe donne la vitesse de déplacement de l'enveloppe du paquet. Sur la figure 1.4, les points bleu et rouge permettent de suivre respectivement la phase et l'enveloppe lors d'une propagation avec dispersion.

1.3.8 Pourquoi s'intéresser aux OPPH ?

Nous avons étudié un cas très particulier d'onde progressive, les OPPH. Or celles-ci ont de nombreux inconvénients : concrètement une OPPH n'est pas bornée ni spatialement ni temporellement puisqu'elle est périodique en espace et en temps. Elle devrait donc emplir tout l'espace, et être infinie en temps. C'est très difficile à réaliser. . .

Pis, si l'on souhaitait calculer l'énergie totale de l'onde (ce que nous ferons pour une OPPH électromagnétique dans ce chapitre), on se rendrait compte que celle-ci est infinie ! L'OPPH n'est pas une onde physique acceptable. Pourtant, la notion d'onde plane est très utilisée en optique ; elle décrit typiquement des faisceaux lumineux « parallèles » (qu'il vaudrait mieux qualifier d'ondes **quasi-planes**). Pourquoi cet engouement en optique pour les ondes planes ? Exactement pour la même raison que l'électronique fait la part belle aux signaux sinusoïdaux ou la mécanique quantique aux états stationnaires : **la décomposition de Fourier**.

Décomposition de Fourier

La décomposition de Fourier assure qu'une fonction $f(t)$ suffisamment régulière et de carré intégrable

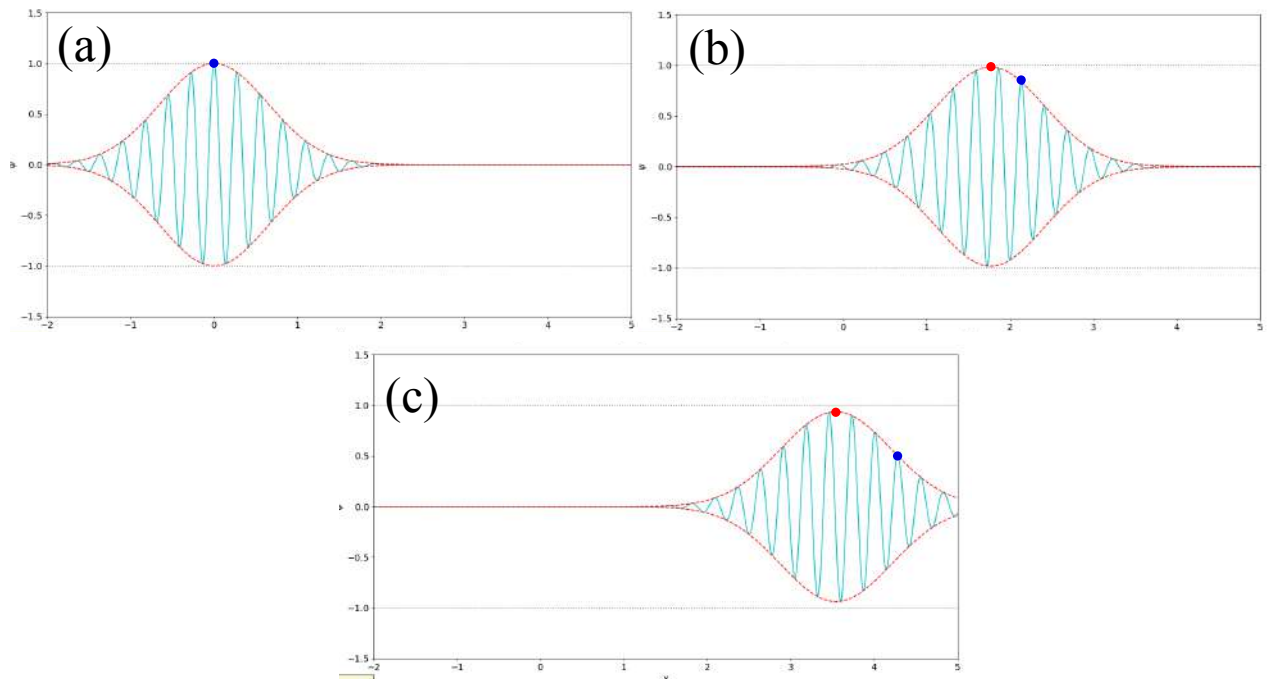


FIGURE 1.4 – Simulations de propagation d'un paquet d'onde avec dispersion. À l'instant initial (a) les points rouges et bleus sont superposés. Sur les images (b) et (c) on voit que la phase (repérée par le point bleu) avance à une vitesse différente du paquet d'onde (point rouge).

pourra toujours s'écrire comme une somme continue d'OPPH, avec des coefficients dépendant continûment de la fréquence (la transformée de Fourier : $\hat{f}(\omega)$).

Les OPPH forment une base de l'espace des fonctions, sur laquelle on peut décomposer n'importe quelle onde. ²

On peut donc décomposer n'importe quelle onde comme une somme d'OPPH. Quel intérêt ? Si on comprend comment se propagent les OPPH, peut-on en déduire la propagation de leur somme ? Réponse : *OUI, quand les équations sont linéaires!* Ce qui est le cas des équations de Maxwell, de Schrödinger, de l'électrocinétique, etc. Bref, de la quasi-intégralité des phénomènes physiques que vous avez étudié jusque-là. ³

L'esprit de la résolution d'un problème en électromagnétisme s'intéressant à la propagation d'une onde est donc :

- On décompose l'onde en OPPH ;
- On trouve la relation de dispersion du milieu, ce qui permet de comprendre comment se propage une OPPH ;
- On fait la somme pour revenir à la propagation de l'onde totale.

Cependant, les étapes 1 et 3 cruciales dans un problème d'ingénierie sont souvent omises dans les cours de physique. . .

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir reconnaître l'équation de d'Alembert, et connaître la forme de ses solutions.
- ✓ Définir chacun des termes qui composent « OPPH »

2. Si les ondes planes sont une base de décomposition bien connue, il en existe d'autres qu'on utilise dans des cas plus spécifiques souvent liées aux conditions aux limites : les faisceaux gaussiens, les modes de Hermite, de Laguerre-Gauss, etc.

3. Attention, nous sommes entourés de phénomènes qui sont non-linéaires, dont des propagations d'ondes. Deux exemples d'équations d'onde très célèbres : les équations de Navier-Stokes et l'équation de Korteweg-de Vries.

- ✓ S'entraîner à passer de la notation réelle à la notation complexe
- ✓ Déterminer une relation de dispersion à partir d'une équation de propagation.
- ✓ Savoir interpréter les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde.
- ✓ Savoir interpréter les vitesses de phase et de groupe.

2 Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques

Dès 1865, Maxwell a essayé de synthétiser des lois expérimentales comme celles de l'électrostatique, du magnétisme, de l'induction, etc. En cherchant des relations entre ces différents phénomènes, il est arrivé à un système de 20 équations écrites en coordonnées couplant champs, charges, et force. C'est grâce aux travaux d'Heaviside que celles-ci ont pu être réécrites de manière vectorielle en quatre équations compactes. Ce système de quatre équations aux dérivées partielles dites de Maxwell qui couplent les champs électrique et magnétique fut publié dans sa forme définitive en 1873 dans l'ouvrage *Electricity and Magnetism*. Elles permettent de décrire tous les phénomènes électriques et magnétiques, dans le vide ou dans les milieux matériels. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz, qui historiquement faisait partie des équations de Maxwell.

2.1 Les équations de Maxwell dans le vide

La théorie de l'électromagnétisme repose sur deux piliers fondamentaux répondant aux deux questions complémentaires suivantes :

1. Étant donné des champs \vec{E} et \vec{B} , comment ceux-ci agissent-ils sur une particule de masse m et de charge électrique q ?
2. Étant donné une distribution de charges et de courants, quels sont les champs électrique et magnétique créés dans l'espace et le temps ?

La réponse à la première interrogation est la force de Lorentz :

Force de Lorentz

En présence d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , une particule de charge q à la vitesse \vec{v} subit une force :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (1.34)$$

Pour la seconde interrogation, la réponse est contenue dans les équations de Maxwell : sous leur formes locales (ou « différentielles »), les équations de Maxwell donnent l'expression des dérivées spatiales des champs \vec{E} et \vec{B} en un point M à l'instant t en fonction des charges, courants en ce point ainsi que les dérivées temporelles des champs. Elles s'écrivent :

Équations de Maxwell

Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(MG)
Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(MA)
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(MF)
Maxwell-Thomson	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	(MT)

avec

- $\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \approx 1,25 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ la perméabilité du vide. Jusqu'en 2018, la valeur de μ_0 était posée à partir de la force qui s'exerce entre deux fils parcourus par un courant de 1 A, ce qui définissait l'ampère. Depuis, c'est la charge élémentaire qui est posée, et on en déduit la valeur de μ_0 .
- $\varepsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ la permittivité du vide, valeur fixée par μ_0 et c la célérité de la lumière dans le vide par $\varepsilon_0 = 1/c^2 \mu_0$.^a

a. Ces grandeurs sont propres au système d'unités international (SI), le système CGS américain ne les utilise pas.

Ces quatre équations sont valables en chaque point de l'espace M à tout instant t : on dit que cette écriture est **locale**.⁴

On peut séparer ces quatre équations en deux groupes : les deux premières relient les champs aux sources extérieures (ρ et \vec{j}), alors que les deux dernières sont des équations de « structure », qui permettent en particulier de définir les potentiels scalaire et vecteur.

Le champ \vec{B} étant à divergence nulle (MT), il existe un champ de vecteur $\vec{A}(M, t)$ tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, appelé **potentiel vecteur**. Cependant, ce champ n'est pas unique : pour n'importe quelle fonction f la quantité $\vec{A} + \text{grad } f$ vérifiera l'équation de Maxwell-Thomson. Le champ \vec{A} n'a donc pas d'interprétation physique en lui-même, seul son rotationnel en a une.

Avec la définition de ce potentiel vecteur, à partir de l'équation (MF), on montre l'existence d'un **potentiel scalaire** $V(M, t)$ (si \vec{A} est fixé, il est déterminé à une constante près).⁵ On retiendra les équations reliant champs et potentiels :

Expressions des champs en fonction des potentiels

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1.35)$$

Quelles sont les équations vérifiées par ces potentiels \vec{A} et V ? On peut réinjecter les expressions des champs en terme des potentiels dans les équations de Maxwell. On obtiendra des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles d'ordre 2 pour V et \vec{A} .⁶ Celles-ci sont découplées, et font intervenir ρ (pour V) et \vec{j} (pour \vec{A}).

Les termes $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$ sont appelés termes **sources** (par exemple la distribution de charge et de courant dans une antenne qui émet une onde électromagnétique). Ce sont les termes qui donnent naissance aux champs électrique et magnétique. Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère montrent cependant que les champs eux-mêmes peuvent être des termes de sources. Nous verrons plus loin que cette remarque est fondamentale pour que les champs \vec{E} et \vec{B} se propagent dans l'espace vide.

2.2 Approche mésoscopique

Les grandeurs $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$ sont les densités de charge et de courant en chaque point de l'espace. Si on adoptait une description microscopique pure, la répartition des charges et des courants seraient des sommes discrètes puisque les charges sont ponctuelles en mécanique classique.⁷ De plus, à l'échelle microscopique, les champs électrique et magnétique prennent des valeurs très grandes, et varient fortement sur des échelles de distance très petites (l'échelle atomique). Par exemple, dans un atome d'hydrogène, les électrons chargés $-e$ sont espacés d'une distance de l'ordre de 10^{-10} m du noyau chargé $+e$. Soit un champ électrique de l'ordre de $E \sim 10^{11} \text{ V m}^{-1}$ qui change de signe tous les $d \sim 10^{-10}$ m.

4. Pour être plus précis dans les notations, il faudrait écrire par exemple : $(\text{div } \vec{E})(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$, mais cela alourdirait considérablement les expressions. On ne le précisera que si nécessaire par la suite.

5. Cette liberté quant au choix de \vec{A} et V est appelée **liberté de jauge**. Nous ne reviendrons pas sur cette notion dans ce cours.

6. Pour les exprimer simplement, il faudrait définir la notion de jauge, en particulier choisir la jauge de Lorenz.

7. En mécanique quantique, il faudrait prendre une approche ondulatoire avec les fonctions d'onde des particules chargées, mais cela ne changerait pas le résultat moyenné à plus grande échelle.

Pour éviter de travailler avec ces grandeurs très fluctuantes, on adopte une *échelle mésoscopique* : on se place à une échelle intermédiaire grande devant la distance atomique, et petite devant l'échelle macroscopique (typiquement une distance du μm). On travaille avec les champs moyennés spatialement sur ces distances ($\vec{E} \rightarrow \langle \vec{E} \rangle$), et avec des nombres de charges tellement grands devant 1, qu'on pourra considérer que celles-ci varient continûment à l'échelle mésoscopique.

Concrètement, si on étudie la charge dQ dans un petit volume dV mésoscopique autour du point M on écrira :

$$dQ = \sum_{i \in dV} q_i = \rho(M)dV \quad (1.36)$$

avec ρ une fonction continue à l'échelle mésoscopique. La charge totale dans un volume V pourra alors s'écrire :

$$Q = \sum_{i \in V} q_i \approx \iiint_{M \in V} \rho(M)dV. \quad (1.37)$$

De même on rappelle que l'intensité du courant macroscopique I à travers une surface S est par définition le flux de \vec{j} à travers S :

$$I = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{dS}. \quad (1.38)$$

On ne revient pas sur les descriptions surfaciques et linéiques des distributions de charges et courants vues l'année précédente.

Rappels d'analyse vectorielle

Le théorème de Stokes est un résultat central utilisé en analyse vectorielle. Il se décline sous plusieurs formes, selon la dimension spatiale des objets auxquels on s'intéresse ; deux de ces formes seront utiles pour exprimer la version intégrale des équations de Maxwell :

Théorème de Green-Ostrogradski Il assure que le flux d'un champ de vecteur \vec{F} à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume V délimité par S .

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}, \quad (1.39)$$

où $\vec{dS} = \vec{n} dS$ avec \vec{n} le vecteur normal à la surface au point P de calcul, et dS l'élément de surface élémentaire (cf. fig. 1.5 (a)).

Théorème de Green-Stokes Il relie la circulation d'un champ de vecteur \vec{F} sur un contour fermé orienté \mathcal{C} au flux de son rotationnel à travers une surface S (ouverte) délimitée par \mathcal{C} .

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}, \quad (1.40)$$

où $\vec{d\ell}$ représente le vecteur déplacement élémentaire le long du contour \mathcal{C} (i.e. le vecteur directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}) (cf. fig. 1.5 (b)).

2.3 Propriétés et formes globales des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des équations différentielles couplées d'ordre 1 aux dérivées partielles. Elles ont une propriété fondamentale qui va justifier tout le développement de ce cours : elles sont *linéaires* par rapport aux champs \vec{E} et \vec{B} .

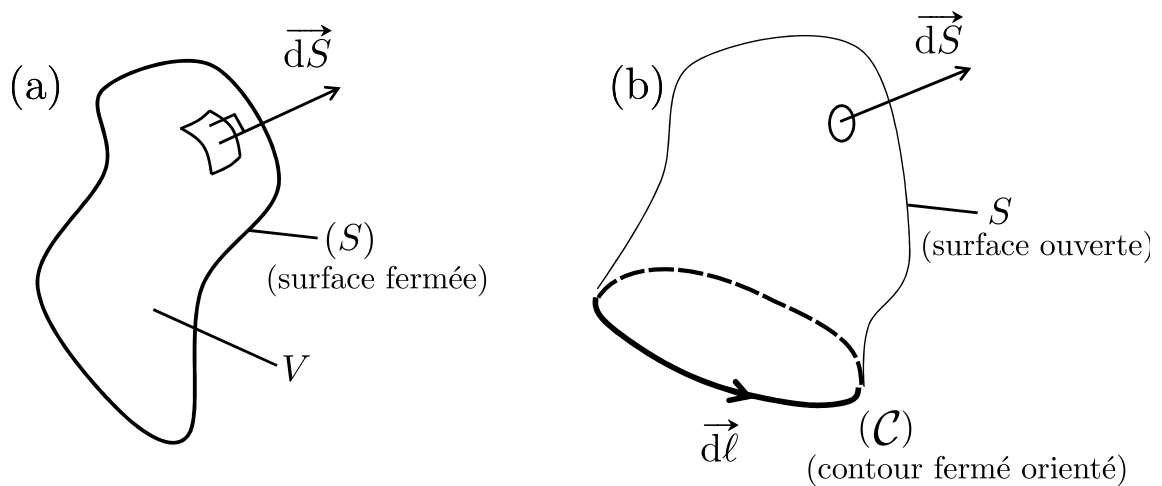


FIGURE 1.5 – (a) Volume V délimité par la surface fermée S . (b) Exemple de surface ouverte S reposant sur le contour fermé orienté C ; l'orientation du contour C impose le sens de $d\vec{S}$ (règle du tire-bouchon).

Linéarité des équations de Maxwell

Si (\vec{E}_i, \vec{B}_i) avec $i = 1, 2$ est une solution des équations de Maxwell pour une distribution de charge et courant (ρ_i, \vec{j}_i) , alors toute superposition $\alpha(\vec{E}_1, \vec{B}_1) + \beta(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ est aussi solution, pour les distributions $\alpha(\rho_1, \vec{j}_1) + \beta(\rho_2, \vec{j}_2)$.

Cela signifie qu'au lieu de chercher la solution des équations pour une distribution très compliquée, on peut découper cette distribution en morceaux plus symétriques qui permettront une résolution simple, puis sommer les solutions. Cette propriété de linéarité donne aussi la possibilité d'utiliser les notations complexes, et d'utiliser les théorèmes de décomposition de Fourier.

Existence et unicité des solutions des équations de Maxwell

On s'intéresse à un domaine Ω de l'espace dans lequel on souhaite résoudre les équations de Maxwell. Étant donné

- les quatre équations de Maxwell donnant divergences et rotationnels des champs ;
- les termes de sources ρ et \vec{j} dans tout l'espace ;
- les conditions aux limites des champs sur les bords de Ω :

il existe *une et une seule solution* (\vec{E}, \vec{B}) des équations de Maxwell.

Cette propriété permet donc d'assurer l'unicité de la solution, et elle est souvent utilisée dans les propriétés de symétrie de la distribution de charge ou de courant : si deux champs sont solutions du problème, c'est qu'ils sont identiques.

La connaissance de ces informations permet donc *en théorie* de déterminer complètement (\vec{E}, \vec{B}) dans n'importe quelle situation. Cependant, cette vision séduisante se heurte rapidement à la réalité, à savoir la difficulté prodigieuse de trouver une expression explicite de problèmes pourtant très simples.

Dans la suite, on s'intéresse aux formes intégrales de ces équations, qui permettent souvent de faire ressortir leur signification physique.

L'équation de Maxwell-Gauss (MG)

Cette équation s'écrit sous forme locale $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, et sous forme intégrale (grâce au théorème de Green-Ostrogradski) :

$$\oiint_{P \in S} \vec{E}(P) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (1.41)$$

où Q_{int} représente la charge globale comprise dans le volume V délimité par la surface fermée S . Le vecteur \vec{dS} est normal à la surface au point P . Celui-ci dépend bien sûr du point P considéré. Cette équation montre donc que le flux du champ électrique à travers n'importe quelle surface fermée est directement lié à la charge comprise dans le volume délimité par cette surface.

L'équation de Maxwell-Thomson (MT)

L'équation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ se transforme avec le théorème de Green-Ostrogradski en une forme intégrale :

$$\iiint_{M \in V} \operatorname{div} \vec{B}(M) dV = \oiint_{P \in S} \vec{B}(P) \cdot \vec{dS} = 0 \quad (1.42)$$

où S représente une surface fermée délimitant le volume intérieur V et \vec{dS} est un vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur.

Cette équation montre donc que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface *fermée* est nul. De façon équivalente, le flux du champ magnétique à travers une surface ouverte S ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface. C'est la raison pour laquelle on associe une unité physique au flux magnétique : le weber, noté Wb.

En comparant cette équation avec l'équation de Maxwell-Gauss, on observe une asymétrie : la théorie prévoit des charges électriques, mais ne prévoit pas de charges magnétiques (ou monopôles) puisque le champ \vec{B} ne peut pas diverger de ses sources. Ceci est cohérent avec l'absence d'observation expérimentale de monopôles magnétiques. Les sources principales de champ magnétique sont donc les dipôles (comme les aimants et les bobinages).

L'équation de Maxwell-Faraday (MF)

Cette équation de structure s'écrit

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.43)$$

En utilisant le théorème de Stokes, on aboutit à sa forme intégrale

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \right) \quad (1.44)$$

où S représente une surface délimitée par le contour C , $\vec{d\ell}$ le vecteur directeur du contour et \vec{dS} le vecteur surface normal à la surface.

Cette équation décrit le phénomène d'induction. En effet, dans un circuit fermé (contour), la force électromotrice e est définie comme la circulation de la force de Lorentz sur ce contour divisée par la charge q :

$$e = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{d\ell}. \quad (1.45)$$

L'équation de Maxwell-Faraday montre donc que cette force est égale à la variation temporelle du flux Φ du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit (contour fermé). Autrement dit, l'équation de Maxwell-Faraday est une écriture locale de la loi de Faraday pour l'induction : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.⁸

8. Expression valable pour un circuit unidimensionnel de constitution constante (sans contact glissant), et fixe dans le référentiel d'étude (sinon on rajoute la circulation du champ électromoteur).

L'équation de Maxwell-Ampère (MA)

Cette équation s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]. \quad (1.46)$$

Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, homogène à un courant volumique, a été appelé par Maxwell « courant de déplacement ». Sous forme intégrale, on obtient en utilisant le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[I + \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right]. \quad (1.47)$$

où S représente une surface délimitée par le contour C , $d\vec{\ell}$ le vecteur directeur du contour, $d\vec{S}$ le vecteur normal à la surface et I le flux du courant volumique \vec{j} à travers la surface S . Il est à noter que ce flux n'est pas nécessairement conservatif en régime dépendant du temps, ce qui signifie que I dépend du choix de la surface. Par contre, le flux de $\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est conservatif puisque la circulation du champ magnétique sur un contour fermé ne dépend pas de la forme de la surface délimitée par le contour.

Cette équation montre donc que la circulation du champ magnétique sur un contour fermé est égale au flux du courant à travers la surface délimitée par le contour. Cette forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère n'est autre que le **théorème d'Ampère** plus connu sous sa forme stationnaire (absence de courant de déplacement) :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I. \quad (1.48)$$

Conservation de la charge

Ces quatre équations de Maxwell impliquent nécessairement que la charge électrique est conservée, conservation qui pourrait pourtant sembler indépendante des lois régissant champs électrique et magnétique. En effet, prenant la divergence de (MA), et en remplaçant $\text{div } \vec{E}$ par l'équation (MG), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (1.49)$$

C'est l'équation locale de conservation de la charge. Pour retrouver cette loi, la présence du terme de courant de déplacement est indispensable. C'est historiquement le terme ajouté en dernier aux équations par Maxwell, qui prédit également la propagation d'ondes électromagnétiques.

2.4 Propagation de l'énergie

Vecteur de Poynting

On souhaite décrire le transport de l'énergie électromagnétique, et le flux⁹ associé à l'énergie est la puissance \mathcal{P} en $\text{J s}^{-1} = \text{W}$. Comme dans le cas du transport de la charge ou de la masse, on souhaite lui associer un vecteur densité de courant, ainsi qu'une densité volumique.

Définition

On écrit donc la puissance électromagnétique \mathcal{P} qui traverse une surface S comme :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}. \quad (1.50)$$

La puissance \mathcal{P} est donc le flux du vecteur $\vec{\Pi}$ à travers cette surface. Ce vecteur est appelé **vecteur de Poynting**.

9. Par définition, le flux d'une grandeur est toujours homogène à la dimension de cette grandeur par unité de temps. Dans notre cas : J s^{-1} .

De plus, la quantité

$$\frac{d\mathcal{P}}{dS} = \vec{\Pi} \cdot \vec{u} \quad (1.51)$$

est la **puissance surfacique** (algébrique) qui se propage dans la direction \vec{u} .

Ce vecteur donne la direction et le sens de la propagation de l'énergie lumineuse. La norme du vecteur $\vec{\Pi}$ représente la puissance instantanée par unité de surface (ou puissance surfacique) exprimée en W m^{-2} .¹⁰

Définition

Les **rayons lumineux** sont les trajectoires de l'énergie lumineuse ; ils correspondent donc aux lignes de champ du vecteur de Poynting et qui traduisent en quelque sorte le sens de « l'écoulement de l'énergie » (par analogie avec un fluide).

Remarque Attention la direction de propagation de l'onde donnée par \vec{k} et celle de l'énergie donnée par $\vec{\Pi}$ sont deux notions indépendantes. Ces deux vecteurs sont colinéaires dans les milieux isotropes, mais *pas* dans les milieux biréfringents, ce que nous verrons au chapitre 7.

Conservation de l'énergie dans le vide

La conservation de l'énergie est l'un des principes de base en physique. Dans le cas de l'électromagnétisme, il peut exister des transferts d'énergie entre les champs \vec{E} et \vec{B} et les charges. En l'absence de sources (densités de charges et de courants nuls), l'énergie électromagnétique est conservée. Encore une fois, comme dans le cas de la masse et de la charge, il doit exister une équation locale de conservation de l'énergie qui fait intervenir le vecteur densité de courant et la quantité volumique de la grandeur qui se conserve.

Notons donc u_{em} la densité volumique d'énergie (J m^{-3}), et écrivons que la variation instantanée de l'énergie contenue dans un volume V correspond à la puissance électromagnétique qui traverse la surface fermée délimitant le volume V :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u_{em} dV = - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}. \quad (1.52)$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradski, on transforme l'intégrale de surface en intégrale volumique :

$$\iiint_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div } \vec{\Pi} dV = 0. \quad (1.53)$$

Cette relation devant être vraie quelque soit le volume V , les intégrandes sont égaux, on obtient en l'absence de charges

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (1.54)$$

Expressions du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie volumique

On souhaite déterminer les grandeurs u_{em} et $\vec{\Pi}$ en fonction des champs \vec{E} et \vec{B} . D'après les propriétés des opérateurs d'analyse vectorielle, on peut écrire :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}. \quad (1.55)$$

En utilisant les équations de Maxwell dans le vide, on a

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \mu_0 \vec{E} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}^2 + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}^2) - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.56)$$

10. Chaque composante Π_i ($i = x, y$ ou z) représente la puissance électromagnétique instantanée par unité de surface transportée dans le sens de l'axe (Oi). Une valeur négative de Π_i indique que la propagation se fait en sens contraire de l'axe (Oi).

On peut finalement écrire

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.57)$$

On trouve ainsi une équation locale de conservation de l'énergie avec un second membre, on peut conclure :

Conservation de l'énergie, vecteur de Poynting et densité d'énergie

La conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit localement

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (1.58)$$

avec

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2}. \quad (1.59)$$

La puissance volumique cédée du champ aux charges électriques s'écrit

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (1.60)$$

L'équation précédente montre que les champs cèdent de l'énergie aux charges. Plus précisément, $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la densité volumique de puissance cédée. On peut montrer réciproquement que les charges récupèrent de l'énergie des champs en calculant la puissance volumique de ces charges :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \frac{1}{dV} \sum_{i \in dV} q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i = \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \frac{1}{dV} \sum_{i \in V} q_i \vec{v}_i = \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (1.61)$$

2.5 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Bien que prévue dès 1876, la propagation des ondes électromagnétiques n'a été étudiée expérimentalement qu'en 1888 par H. Hertz. Dans l'espace libre de toute charge et de tout courant on a $\rho(M, t) = 0$ et $\vec{j}(M, t) = 0$. Les équations de Maxwell deviennent très symétriques :

Équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{MG}) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{MT}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA}). \end{aligned} \quad (1.62)$$

D'après l'équation (MF), la variation de champ \vec{B} dans le temps peut être vue comme une source de champ électrique. De même, l'équation (MA) montre que la variation de \vec{E} dans le temps joue le rôle de terme source pour le champ magnétique. Ainsi, même en l'absence de charges et de courants, il pourra exister un champ électromagnétique variable au voisinage du point M dans le vide, qui sera source de champ électromagnétique dans son voisinage, et ainsi de suite de proche en proche.

Décrivons la propagation du champ électrique à partir des équations de Maxwell. En dérivant dans le temps l'équation de Maxwell-Ampère, les variables d'espace et de temps étant indépendantes, on obtient :

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.63)$$

et en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$-\text{rot} \left(\text{rot} \vec{E} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.64)$$

D'après les propriétés des opérateurs (voir la section suivante sur les propriétés des laplaciens), on peut remplacer le double rotationnel :

$$\Delta \vec{E} - \text{grad} \left(\text{div} \vec{E} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.65)$$

En l'absence de charges, la divergence du champ électrique étant nulle. On obtient **l'équation de propagation** sur le champ électrique et il est facile de montrer que l'équation est la même pour le champ magnétique.

Équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}. \quad (1.66)$$

Il s'agit de laplaciens *vectoriels*, par conséquent chacune des deux équations synthétise en réalité trois équations écrites sur chaque composante du champ :

$$\Delta f - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad f = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z. \quad (1.67)$$

Chacune des composantes des champs \vec{E} et \vec{B} vérifie l'équation de propagation de d'Alembert, avec

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}. \quad (1.68)$$

Cette constante est appelée **célérité de la lumière dans le vide**. Elle a été fixée à $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ dans le système international d'unité¹¹. On retiendra que $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Bien sûr, l'appellation peut être trompeuse : cette célérité n'est pas associée qu'à la lumière, mais à toutes les ondes électromagnétiques se propageant dans le vide.

2.6 OPPH électromagnétiques dans le vide

Les ondes électromagnétiques sont définies par les champs vectoriels (\vec{E}, \vec{B}) , qui sont déterminés par les équations de Maxwell. Nous avons vu que les six composantes des champs électrique et magnétique vérifient la même équation de d'Alembert. De plus, la connaissance d'un champ permet de déterminer le second **via** les équations de Maxwell. Dans ce qui suit, nous écrirons uniquement les ondes sur les composantes du champ électrique. Les expressions du champ magnétique, qui peuvent se déduire des équations de Maxwell, sont de même forme.

Pour les raisons que nous avons détaillées dans la partie précédente (théorème de Fourier), on s'intéresse aux solutions en OPPH pour le champ \vec{E} , puisque celles-ci permettent de reconstruire toutes les formes d'ondes. Le champ électrique ayant trois composantes, l'expression la plus générale en coordonnées cartésiennes s'écrit en un point M de position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$:

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0x} \right) \\ E_{0y} \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0y} \right) \\ E_{0z} \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0z} \right) \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

11. <https://www.bipm.org/fr/si-base-units/metre>

En annexe à ce chapitre, vous trouverez un classement des ondes selon leur fréquence. La figure 1.11 donne une idée générale des dénominations. La figure 1.12 montre l'utilisation par l'humain de la plage des fréquences inférieures aux infra-rouges.

Pour une onde plane se propageant selon \vec{u} , le vecteur d'onde peut s'écrire $\vec{k} = k\vec{u}$, où k est la norme du vecteur.

En notation complexe, cette onde peut s'écrire

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0x})} \\ E_{0y} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0y})} \\ E_{0z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_{0z})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \underline{E}_{0y} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \underline{E}_{0z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

où on a défini pour chaque composante i une **amplitude complexe** $\underline{E}_{0i} = E_{0i} e^{i\varphi_{0i}}$.

Opérateurs vectoriels en notations complexes

Pour une onde plane en notation complexe, la dérivée temporelle devient une multiplication par $-i\omega$. De plus, les opérateurs divergence, rotationnel et laplacien prennent une forme très simple car : $\frac{\partial}{\partial j} \rightarrow \times ik_j$ pour $j = x, y$ et z . On a alors :

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = ik_x \underline{E}_x + ik_y \underline{E}_y + ik_z \underline{E}_z = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}. \quad (1.71)$$

De même, en développant les dérivées qui apparaissent dans le rotationnel, on pourra démontrer :

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}. \quad (1.72)$$

Le laplacien scalaire s'écrit quant à lui :

$$\Delta \underline{E}_i = \frac{\partial^2 \underline{E}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_i}{\partial z^2} = [-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2] \underline{E}_i = -\vec{k}^2 \underline{E}_i. \quad (1.73)$$

Opérateurs différentiels en notation complexe

Les calculs précédents peuvent se résumer à :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longrightarrow \times ik_j, \quad j \in [1, 2, 3] \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \times (-i\omega) \quad (1.74)$$

Attention, même si le « H » de « Homogène » est implicite dans « OPPH », la propriété d'homogénéité est indispensable ! Exercice : montrer que cette relation ne fonctionne pas pour une OPPH non homogène (par exemple $A(x) \cos(kz - \omega t)$).

Structure des OPPH électromagnétiques dans le vide

Grâce au paragraphe précédent, les équations de Maxwell pour des OPPH se réécrivent simplement :

Équations de Maxwell pour des OPPH	
(MG)	$\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$
(MA)	$\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$
(MF)	$\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$
(MT)	$\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$

À partir de (MG) et (MT), on voit que \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux en tout point à \vec{k} . De plus, d'après (MF), \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux. Plus précisément $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct, tel que :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}. \quad (1.75)$$

Cette équation est appelée **équation de structure** des OPPH. L'onde électromagnétique est donc une onde purement transverse dans le vide.



Attention, cette relation est vraie pour les champs en notations complexes. Si et seulement si k est réel, alors on a la relation pour les champs réels : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Si cette relation était vraie tout le temps, cela signifierait que \vec{E} et \vec{B} sont toujours en phase. Nous verrons des cas où cela n'est pas vérifié.

L'équation de d'Alembert vérifiée par toutes les composantes des champs se transforme simplement en $-\vec{k}^2 \underline{E}_i + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_i = 0$, d'où la relation de dispersion (déjà démontrée dans le cas d'une OPPH générale vérifiant l'équation de d'Alembert) :

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.76)$$

Les ondes électromagnétiques dans le vide vérifiant l'équation de d'Alembert, on a

$$v_\phi = v_g = c. \quad (1.77)$$

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est **non dispersive**. Toutes les fréquences se propagent à la même vitesse.

2.7 Énergie électromagnétique et puissance transportée par une OPPH

Attention! Les grandeurs énergétiques étant des grandeurs quadratiques, on doit revenir aux expressions réelles des champs en prenant leur partie réelle : $\underline{E} \rightarrow \vec{E} = \text{Re}(\underline{E})$ et $\underline{B} \rightarrow \vec{B} = \text{Re}(\underline{B})$.

Densité d'énergie d'une OPPH

Le lien entre les champs électrique et magnétique est très simple pour une OPPH, et permet de calculer explicitement les deux contributions de la densité d'énergie u_{em} . On a, puisque \vec{k} et \vec{E} sont orthogonaux :

$$\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})^2}{2\omega^2\mu_0} = \frac{k^2 \vec{E}^2}{2\omega^2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}. \quad (1.78)$$

Ainsi, l'énergie volumique totale s'écrit :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \vec{E}^2. \quad (1.79)$$

L'énergie volumique est donc équitablement répartie entre le champ électrique et le champ magnétique.

Vecteur de Poynting

Remplaçons l'expression de \vec{B} dans le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0\omega} = \frac{\vec{E}^2 \vec{k}}{\mu_0\omega} = \frac{\vec{E}^2 \vec{u}}{\mu_0 c} \quad (1.80)$$

où on a utilisé la formule du double produit vectoriel (cf. encadré ci-dessous).

On trouve finalement :

$$\boxed{\vec{\Pi} = c \varepsilon_0 \vec{E}^2 \vec{u} = c u_{em} \vec{u}}. \quad (1.81)$$

Le vecteur de Poynting s'écrit donc comme la densité d'énergie u_{em} multipliée par la vitesse de transport de l'énergie (ici c) dans la direction de propagation de l'onde \vec{u} . Autrement dit, la puissance surfacique qui se propage dans la direction de l'onde \vec{u} vaut :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dS} = \vec{\Pi} \cdot \vec{u} = c u_{em}. \quad (1.82)$$

C'est le produit de la vitesse de propagation c et de la densité d'énergie u_{em} . On peut faire un parallèle avec le transport de la masse en mécanique des fluides où le vecteur densité de courant massique (l'équivalent de $\vec{\Pi}$) est donné par $\vec{j} = \mu \vec{v}$ soit le produit de la vitesse d'écoulement et de la « densité de masse ».¹²

Rappels mathématiques : double produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (1.83)$$

Puissance reçue par un détecteur

Plaçons un détecteur face à l'onde plane : la surface du détecteur est perpendiculaire à la direction de propagation. Qu'est-ce que le détecteur acquiert ? Le champ électrique ? magnétique ? l'énergie et donc le vecteur de Poynting ? Pour répondre à cette question il faut la spécifier. De quelles ondes parlons-nous ?

- Si on souhaite par exemple détecter une onde entre 1 kHz et 1 GHz, on prendra une antenne qui va détecter directement le champ électrique (les électrons de l'antenne vont se mettre en mouvement et créer un courant électrique dans l'antenne directement lié à l'amplitude du champ).
- Mais si l'on souhaite détecter une onde lumineuse, avec une fréquence de 10^{15} Hz ? Nous allons plutôt utiliser une caméra CCD ou un photomultiplicateur. Ces appareils vont convertir le signal reçu en intensité électrique grâce à un effet photo-électrique : l'absorption d'un photon va créer un électron de conduction et donc un courant. Ici, le détecteur est sensible à l'énergie incidente, donc le vecteur de Poynting.

Dans la seconde situation (la gamme optique qui va particulièrement nous intéresser dans le chapitre d'interférences lumineuses), le détecteur n'est pas assez rapide pour suivre les oscillations (à 10^{15} Hz) de la puissance surfacique. Il est limité par son temps de réponse ($\tau_D > 10^{-10}$ s), et celui-ci n'a accès qu'à la **moyenne temporelle** de cette puissance surfacique (moyenne calculée sur un temps τ_D qui correspond à ton temps de détection) :

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \vec{\Pi}(M, t') dt'. \quad (1.84)$$

Ainsi la puissance surfacique moyenne vaut

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \right\rangle = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{u} \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle u_{em} \rangle. \quad (1.85)$$

La puissance instantanée par unité de surface est remplacée par la puissance moyenne par unité de surface.

De plus, la densité d'énergie moyenne $\langle u_{em} \rangle$ pour un champ électrique $E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ vaut $\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$. Finalement,

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \right\rangle = c \times \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \propto E_0^2. \quad (1.86)$$

12. Dans la majorité des cas étudiés, la vitesse de propagation de l'énergie Π/u_{em} se trouvera être la vitesse de groupe v_g . La relativité impose que la vitesse de l'énergie soit inférieure à c . Nous verrons des cas où $v_g > c$, et donc ne représente pas la propagation de l'énergie.

La puissance reçue par le détecteur est *proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique*. Cette remarque fondamentale va guider nos chapitres sur l'optique ondulatoire plus loin dans ce cours.

Nous définirons plus tard la notion d'intensité lumineuse I (ou plus rigoureusement d'éclairement lumineux \mathcal{E}), qui est la puissance surfacique récupérée par l'œil. Celui-ci n'ayant pas la même efficacité pour toutes les longueurs d'onde, on se bornera à écrire $I \propto E_0^2$.

Il est donc finalement plus utile de calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting que le vecteur de Poynting lui-même.

Conclusion sur les OPPH électromagnétiques dans le vide

Dans le vide, chacune des composantes des champs \vec{E} et \vec{B} vérifie l'équation de d'Alembert. La propagation des OPPH a donc lieu sans dispersion ni déformation, avec une relation de dispersion $\omega = ck$ et une vitesse de phase $v_\phi = c$.

L'onde électromagnétique est une onde transverse, c'est-à-dire que \vec{E} et \vec{B} sont à tout instant orthogonaux au vecteur directeur $\vec{k} / \|\vec{k}\|$.

De plus, les champs \vec{E} et \vec{B} sont reliés par une relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (1.87)$$

La densité d'énergie électromagnétique s'écrit simplement $u_{em} = \varepsilon_0 \vec{E}^2$, celle-ci étant équirépartie entre les champs \vec{E} et \vec{B} . Le vecteur de Poynting donnant la direction de propagation de l'énergie vaut $\vec{\Pi} = cu_{em} \frac{\vec{k}}{k}$, l'énergie est donc transportée dans la direction de propagation de l'onde.

Pour les OPPH dans la gamme de l'optique, à cause de la limite des détecteurs, ce sont les valeurs moyennes des quantités énergétiques qui sont pertinentes.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les équations de Maxwell dans le vide en présence de courant et de charge, dans leur version différentielle et intégrale.
- ✓ Connaître la définition du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie.
- ✓ Démontrer l'équation de propagation vérifiée par les champs électrique et magnétique.
- ✓ Connaître l'équivalent des équations de Maxwell pour les OPPH, ainsi que l'équivalent des opérateurs différentiels.
- ✓ Connaître la plage en longueurs d'onde du visible, ainsi que l'ordre de grandeur de la fréquence d'une onde dans le visible.

3 Polarisation d'une OPPH électromagnétique

Dans la partie 1, nous avons étudié les solutions f à l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. Ici, les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient la même équation, mais il s'agit de champs vectoriels et non scalaires. Il existe ainsi des caractéristiques supplémentaires à la propagation d'une onde électromagnétique, cela est contenu dans la *polarisation* de l'onde.

Nous avons six fonctions scalaires inconnues qui vérifient l'équation de d'Alembert (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y , et B_z). Cependant, les équations de Maxwell nous disent que $E_z = 0$ et $B_z = 0$ pour une onde se propageant selon z . De plus, \vec{B} et \vec{E} sont reliés par l'équation de structure des OPPH. Il ne reste donc que deux fonctions inconnues indépendantes : E_x et E_y .

Pour simplifier les expressions par la suite, considérons une onde plane se propageant le long de l'axe (Oz), soit

$\vec{k} = k\vec{e}_z$. On a $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$. Le champ \vec{E} étant transverse, on peut écrire en toute généralité :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_{0y}) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Remarque Le champ magnétique est défini par $\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E}/\omega$, donc :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_y/c \\ E_x/c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Définition

On fixe une surface d'onde. On appelle **polarisation d'une onde** la trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur champ électrique au cours du temps sur cette surface.

La polarisation dépend des constantes E_{0x} , E_{0y} , φ_{0x} et φ_{0y} .

Quitte à redéfinir l'origine des temps, il est possible de choisir une des deux phases à l'origine nulle. Prenons par exemple $\varphi_{0x} = 0$, et on posera $\varphi_{0y} = \varphi$. De plus, quitte à redéfinir l'origine de l'axe z , on peut choisir le plan d'onde d'intérêt en $z = 0$. On a ainsi l'expression générale (en oubliant la composante E_z) :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

On en déduit que l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une courbe lorsque t s'écoule qui est toujours inscrite dans un rectangle de côté $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$.

3.1 Polarisation rectiligne

Définition

On dit que le champ \vec{E} est **polarisé rectilignement** si la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} au cours du temps est une droite.

Obtention d'une polarisation rectiligne

- Si $E_y = 0$, le champ vibre selon la direction (Ox) , comme schématisé sur le cas (a) de la figure 1.6 ;
- Si $E_x = 0$, le champ vibre selon la direction (Oy) , comme schématisé sur le cas (b) de la figure 1.6 ;
- Sinon le cas général d'une polarisation rectiligne est que $E_y/E_x = \text{cste} = C$. Dans ce cas, le champ oscille dans le plan selon la droite d'équation $y = Cx$. Cette condition se réécrit $\varphi = 0[\pi]$: cas (c) pour $\varphi = 0$ et cas (d) pour $\varphi = \pi$.

3.2 Polarisation circulaire

Définition

On dit que la polarisation est **circulaire** si l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle au cours du temps. La polarisation est circulaire lorsque $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$

En effet, le champ \vec{E} vaut dans le plan $z = 0$:

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \pm \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

On remarque alors que $E_x^2 + E_y^2 = E_{0x}^2$, les composantes du champ électrique vérifient l'équation d'un cercle de centre O et de rayon E_{0x} .

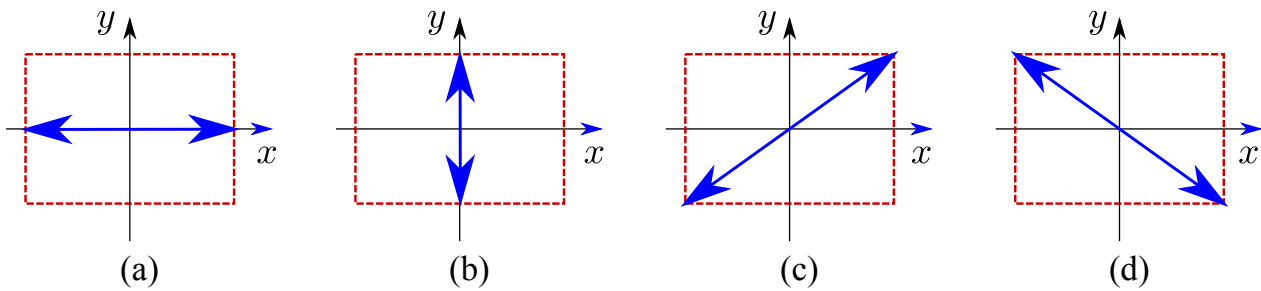


FIGURE 1.6 – Trajectoire de l'extrémité du champ électrique d'une OPPH polarisée rectilignement.

Définition

On peut chercher à savoir dans quel sens le cercle est parcouru. La convention est de placer l'observateur au bout de l'axe z , entraînant de regarder le plan $z = 0$. Si le vecteur se déplace dans le sens trigonométrique, on dit que la polarisation est **circulaire gauche**. S'il se déplace dans le sens horaire, la polarisation est **circulaire droite**.

Méthodes de détermination du sens de polarisation

Il existe (au moins) deux méthodes pour déterminer le sens de polarisation : (1) une basée sur les valeurs du champ \vec{E} à deux instants différents ; (2) une basée sur le calcul de la dérivée du champ \vec{E} à $t = 0$, puis regarder le signe de chaque composante et en déduire le sens de rotation. On détaille le fonctionnement de ces méthodes sur le champ de l'équation (1.91) :

Méthode 1 : par les valeurs du champ à deux instants

- Regarder la position du champ \vec{E} dans le plan xOy à $t = 0$. Ici, on remarque qu'il est selon l'axe (Ox) dans les deux cas.
- Ensuite, faire de même à un instant t' petit, on pourra choisir par exemple $t' = \frac{\pi}{2\omega}$. Ici E_y est de signe ± 1 . Dans le cas $+$ ($\varphi = \pi/2$), le sens de parcours est trigonométrique, c'est une polarisation gauche. Dans le cas $-$ ($\varphi = -\pi/2$) c'est l'opposé.

Méthode 2 : par la dérivée du champ

- Regarder la position du champ \vec{E} dans le plan xOy à $t = 0$. Ici, on remarque qu'il est selon le vecteur \vec{e}_x dans les deux cas.
- Dériver le champ électrique pour connaître le sens de parcours, ici :

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \omega E_{0x} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \pm \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

et regardons sa valeur à $t = 0$, à savoir $\frac{d\vec{E}}{dt} = \omega E_{0x} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. S'il s'agit d'un signe $+$, la dérivée selon Oy sera positive, la composante E_y sera donc croissante. En partant du vecteur \vec{e}_x , cela signifie que le vecteur va tourner dans le sens trigonométrique.

Les deux méthodes ont la même première étape. Une remarque importante pour la seconde méthode : l'étape 1 est cruciale pour déterminer le sens, la connaissance de la dérivée ne suffit pas. Avec la même dérivée positive de E_y , si le champ était initialement selon $-\vec{e}_x$, alors le sens de rotation serait le sens horaire !

Pour des raisons d'efficacité, il est fortement conseillé d'utiliser la première méthode.

Remarque En notation complexe, $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ et le terme de phase revient à multiplier par le nombre complexe $\pm i$. La composante suivant l'axe (Oy) est donc : $\underline{E}_y = \pm i \underline{E}_x$. Le champ électrique complexe en polarisation circulaire s'écrit simplement :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

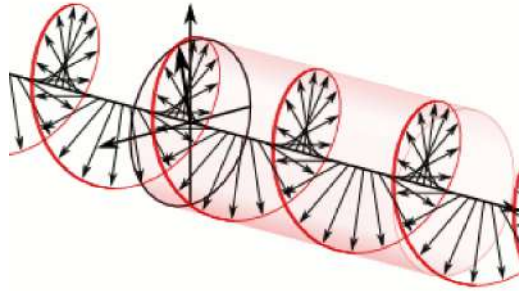


FIGURE 1.7 – Représentation spatiale du champ électromagnétique d'une OPPH à un instant donné, avec une polarisation circulaire

3.3 Cas général

Pour trouver l'équation de la trajectoire de l'extrémité du champ \vec{E} dans le cas général, il faut obtenir une équation liant E_x et E_y en éliminant la dépendance temporelle :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_{0y} (\cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi) \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

En divisant chaque composante par son amplitude, on peut montrer que les composantes vérifient :

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\varphi) = \sin^2 \varphi. \quad (1.95)$$

Il s'agit de l'équation caractéristique d'une ellipse. L'extrémité du champ \vec{E} décrit donc une ellipse inscrite dans un rectangle de côté $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$.

Définition

Dans le cas général, une OPPH a une polarisation *elliptique*.

Comme pour la polarisation circulaire, on peut s'intéresser au sens de parcours de l'ellipse, c'est-à-dire le sens de rotation du champ électrique \vec{E} . La même méthode s'applique que dans le cas circulaire, et

- si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, la polarisation est *elliptique gauche*.
- si l'ellipse est parcourue dans le sens horaire, la polarisation est *elliptique droite*.

Rappelons que l'orientation *droite* ou *gauche* est celle qui est vue, par convention, pour une onde qui se propage vers l'observateur (axe Oz vers l'observateur).

Trouver les axes de l'ellipse (★)

En dehors des cas particuliers $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$, les axes (OXY) de l'ellipse sont inclinés d'un angle α par rapport au repère (Oxy) comme schématisé figure 1.8. Pour s'en convaincre, on peut appliquer une rotation pour passer d'un repère à l'autre :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.96)$$

Pour trouver l'angle α , il faut remplacer les expressions de x et y par les nouvelles coordonnées X et Y , puis chercher à annuler le terme croisé en XY . On trouve :

$$\frac{\sin(2\alpha)}{E_{0y}^2} - \frac{\sin(2\alpha)}{E_{0x}^2} - \frac{2 \cos(\varphi) \cos(2\alpha)}{E_{0x}E_{0y}} = 0 \quad \text{soit} \quad \tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \varphi. \quad (1.97)$$

On remarque que l'angle α dépend des trois paramètres E_{0x} , E_{0y} et φ . L'équation de l'ellipse devient alors :

$$X^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_{0x}^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{E_{0y}^2} - \frac{\sin 2\alpha \cos \varphi}{E_{0x}E_{0y}} \right] + Y^2 \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_{0x}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{E_{0y}^2} + \frac{\sin 2\alpha \cos \varphi}{E_{0x}E_{0y}} \right] = \sin^2 \varphi \quad (1.98)$$

soit $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, qui est l'équation d'une ellipse droite dans le repère (OXY).

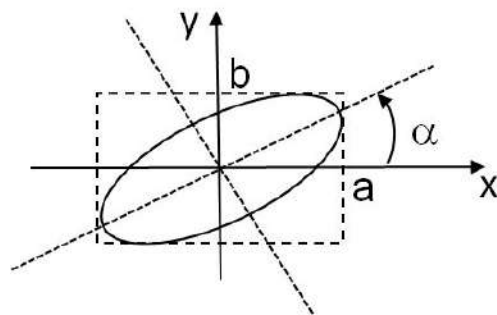


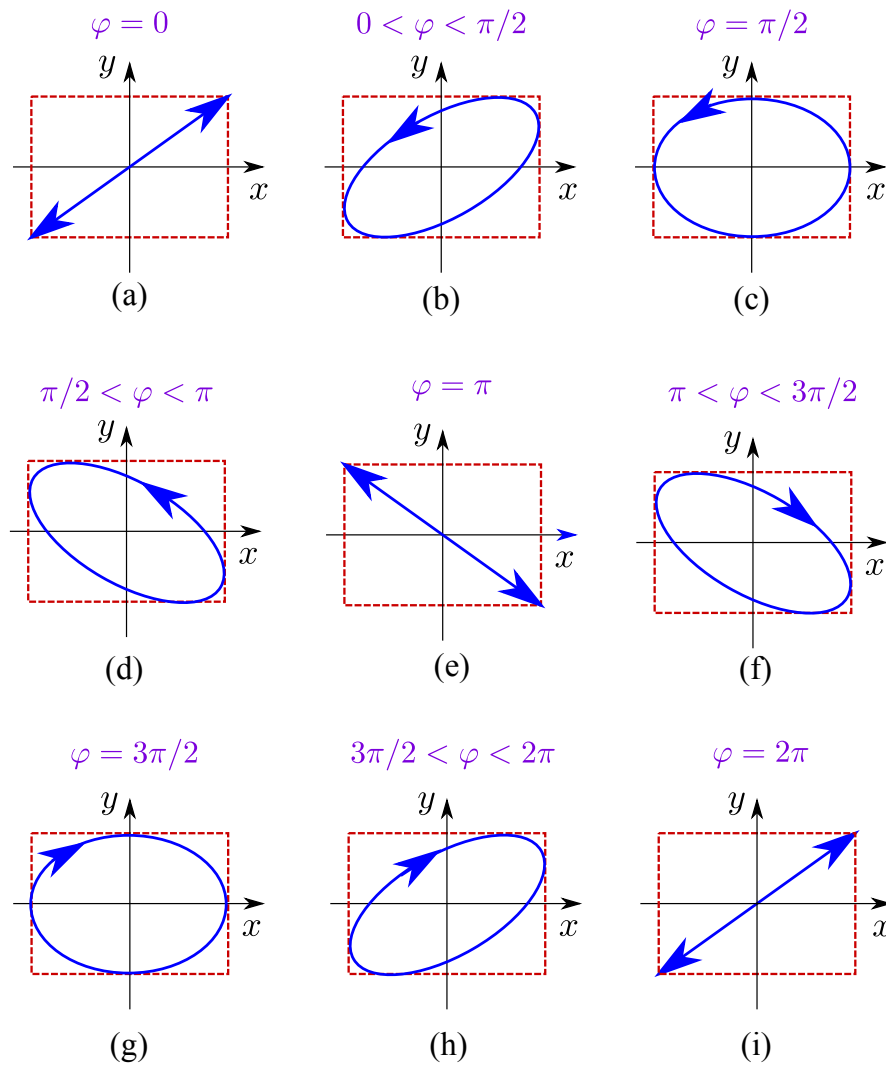
FIGURE 1.8 – Polarisation elliptique obtenu pour un déphasage φ quelconque. Les axes de l'ellipse (OXY) sont inclinés d'un angle α par rapport au repère.

La figure 1.9 montre les différentes polarisations suivant la valeur du déphasage. On vérifie que les axes de l'ellipse et les axes du repère (Oxy) ne sont confondus que dans les cas particuliers où $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3.4 Lumière naturelle

Nous avons ici traité le cas général de la polarisation d'une OPPH. Quelles sont les ondes qui correspondent à cette description ? La lumière du Soleil (aussi dite naturelle) est très loin d'être une OPPH. Le faisceau venant du Soleil est une superposition d'un nombre extravagant d'OPPH de différentes fréquences et différentes polarisations aléatoires entre elles. L'onde résultante est une onde dite **non-polarisée**. Il en est de même pour une lumière spectrale (luminescence). La lumière laser se rapproche d'une OPPH (très monochromatique) avec une polarisation déterminée, mais qui peut varier dans le temps.

Il existe cependant de multiples manières de produire un rayonnement polarisé à partir d'une lumière naturelle que nous étudierons par la suite : par diffusion ou par réflexion sur une interface. On peut aussi utiliser des éléments optiques anisotropes qui agissent différemment sur les composantes du champ comme des polariseurs ou les lames à retard. Nous les étudierons en détail au dernier chapitre, mais donnons ci-dessous une description succincte de leur fonctionnement.

FIGURE 1.9 – Polarisation en fonction du déphasage φ avec $E_{0x} > E_{0y}$

3.5 Polariseurs

On peut produire une lumière polarisée rectilignement à l'aide d'un polariseur. Les polariseurs rectilignes sont le plus souvent basés sur le *dichroïsme*, c'est-à-dire une atténuation sélective d'une composante du champ, selon un axe particulier du milieu. Un exemple très parlant est la grille métallique comme sur la figure 1.10. On considère une OPPH incidente, et on décompose son champ électrique sur les deux axes privilégiés de la grille : l'axe des barreaux et l'axe perpendiculaire. Si le champ électrique est selon l'axe des barreaux, celui-ci va pouvoir exciter les électrons de conduction, et provoquer une absorption puis réémission de l'onde électromagnétique (ce mécanisme sera justement décrit au chapitre suivant). En revanche, la composante perpendiculaire n'interagit pas avec le matériau car les électrons ne peuvent pas sortir du barreau, et elle est transmise.

Ces grilles métalliques sont très efficaces pour des ondes dont la longueur d'onde est supérieure à l'espacement entre les barreaux. Pour la lumière visible ($\lambda < 1 \mu\text{m}$), on utilise des feuilles Polaroid qui sont constituées de longues chaînes de polymères étirés majoritairement dans une direction. Des colorants attachés à ces chaînes absorbent le champ électrique orienté dans la même direction, et sur une grande gamme de longueurs d'ondes. Ils fonctionnent selon le même principe que la grille métallique.

Plus précisément, on repère le polariseur à l'aide de deux directions : le vecteur unitaire \vec{u} qui désigne le sens « passant » du polariseur et le vecteur unitaire \vec{u}_\perp qui lui est perpendiculaire (qui correspond à l'orientation des barreaux de la grille ou des polymères).

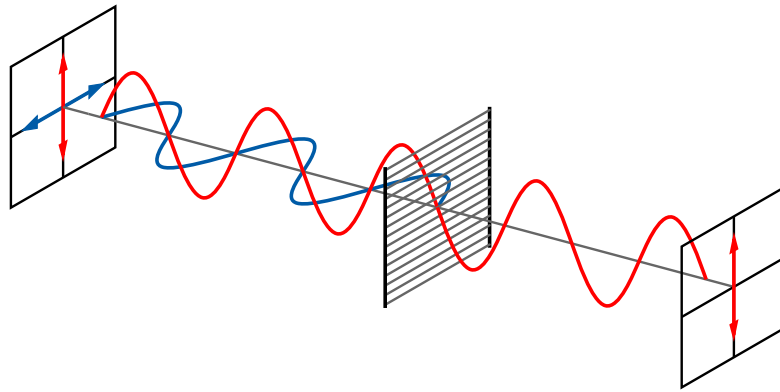


FIGURE 1.10 – Principe de fonctionnement d'un polariseur à grille. Seule la composante du champ perpendiculaire aux barreaux de la grille est transmise. Adaptée de [Wikipédia](#).

On peut décomposer l'amplitude \vec{E}_0 du champ électrique incident $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ selon ces deux directions :

$$\vec{E}_0 = E_0 \cos \alpha \vec{u} + E_0 \sin \alpha \vec{u}_\perp. \quad (1.99)$$

En sortie du polariseur, la composante orientée selon \vec{u}_\perp a été complètement atténuée (dans l'hypothèse d'un polariseur parfait) et le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}'_0 = E_0(\cos \alpha) \vec{u} + 0 \times \vec{u}_\perp. \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{E}'_0 = (\vec{E}_0 \cdot \vec{u}) \vec{u}}. \quad (1.100)$$

Cas d'une OPPH polarisée rectilignement Supposons que l'onde incidente soit une OPPH déjà polarisée rectilignement, par exemple $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$. Si le polariseur a son sens passant orienté selon \vec{e}_x , alors le champ est inchangé¹³. Sinon, appelons l'angle α entre \vec{e}_x et \vec{u} , on a

$$\vec{E}'_0 = E_0 \cos \alpha \vec{u}. \quad (1.101)$$

Nous avons vu qu'un détecteur dans le visible est sensible à la puissance surfacique, aussi appelée intensité lumineuse $I \propto E_0^2$ (nous reverrons cette définition au chapitre 5).

Loi de Malus

Soit I_0 l'intensité lumineuse lorsque $\alpha = 0$. L'intensité lumineuse pour une orientation quelconque du polariseur vaut

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \alpha}. \quad (1.102)$$

La loi de Malus montre que l'intensité transmise par l'analyseur est nulle si l'analyseur et la polarisation du champ sont croisés ($\alpha = \pi/2$). Ceci constitue une preuve du **caractère vectoriel** du champ électrique et de sa polarisation rectiligne.

Analyseur Souvent, l'obtention d'une onde polarisée rectilignement se fait avec un premier polariseur. Dans ce cas, le second polariseur est appelé **analyseur**, puisqu'il cherche à analyser les modifications subies par la polarisation de la lumière (dans l'idée de placer un élément optique à étudier entre les deux polariseurs). Le principe de l'analyse consiste à mesurer la puissance électromagnétique transmise à travers l'analyseur en fonction de son orientation.

13. On néglige les autres effets d'atténuation et les effets de réflexion/transmission aux interfaces, qui seront vus au chapitre 4.

3.6 Notion de lame à retard

Certains matériaux sont capables de modifier la polarisation d'une onde incidente sans atténuer son amplitude comme le fait un polariseur, mais en déphasant les deux composantes du champ électrique. La modification de la polarisation provient alors d'une anisotropie dans le milieu, on dit qu'il est *biréfringent*. Les lames à retard sont une application particulière de ces matériaux, nous les étudierons en détail au chapitre 7.

Principe d'une lame à retard On place deux polariseurs croisés à 90° sur le chemin d'une onde lumineuse, on a extinction en sortie du second polariseur (l'analyseur). On introduit maintenant la lame à retard entre le polariseur et l'analyseur. Si on tourne la lame à retard dans son plan, on trouve deux orientations perpendiculaires pour lesquelles on conserve l'extinction en sortie de l'analyseur. On appelle ces orientations les *lignes neutres* de la lame : lorsque la polarisation du champ \vec{E} est alignée avec une ligne neutre, la polarisation de l'onde sortante n'est pas changée.

Lorsque la lame est dans une orientation quelconque, on constate qu'il n'y a plus extinction : la polarisation de l'onde a changé. On admettra à ce stade que l'effet de la lame à retard est d'introduire un déphasage entre les deux composantes du champ électrique projeté selon les lignes neutres de la lame. À la traversée de la lame, le champ \vec{E} s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \cos(kz - \omega t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traversée}} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(k(z + e) - \omega t) \\ E_{0y} \cos(k(z + e) - \omega t - \Delta\varphi) \end{pmatrix}. \quad (1.103)$$

La lame a introduit un retard de phase entre les deux composantes $\Delta\varphi$. L'origine de ce retard vient d'une différence de vitesse de propagation entre les deux composantes à l'intérieur de la lame, ce que nous comprendrons mieux au chapitre 7. On admettra pour l'instant que le déphasage dépend de l'épaisseur de la lame e , de la longueur d'onde λ de l'onde et d'une grandeur sans dimension appelée *biréfringence* Δn :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{e\Delta n}{\lambda}. \quad (1.104)$$

La polarisation obtenue dépend de la valeur de $\Delta\varphi$ pour la longueur d'onde considérée et de la polarisation de l'onde incidente qui fixe les valeurs de E_{0x} et E_{0y} (cf. fig. 1.9).

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir définir la polarisation d'une onde.
- ✓ Identifier polarisation rectiligne, circulaire, elliptique. Identifier une polarisation gauche et droite.
- ✓ Connaître la loi de Malus et savoir la redémontrer.

3.7 Intérêt et utilisation des ondes polarisées

La polarisation des ondes (et donc l'aspect vectoriel de la lumière) est un aspect très utilisé :

- dans le monde qui nous entoure : la polarisation partielle de la lumière du ciel est une information importante pour les abeilles en particulier ¹⁴
- dans les applications artistiques ou technologiques : les photographes utilisent fréquemment des filtres polarisants pour rendre la couleur du ciel plus profonde et mieux discerner les nuages ; le cinéma en 3D est construit sur l'utilisation de deux polarisations différentes, dédiées chacune à un œil différent pour reproduire cet effet 3D ; en radio, il est d'usage d'utiliser des polarisations différentes pour deux signaux de fréquences proches afin d'éviter les interférences, etc.
- la « première lumière de l'univers » est partiellement polarisée. Le CMB (Cosmic Microwave Background) dans lequel nous baignons est l'objet d'études en astrophysique et sa polarisation partielle donne de nombreuses informations sur les premiers instants de l'univers...

14. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Polarisation_\(optique\)#Dans_la_vie_de_tous_les_jours](https://fr.wikipedia.org/wiki/Polarisation_(optique)#Dans_la_vie_de_tous_les_jours)

Question d'investigation

En achetant des lunettes de soleil, on vous propose souvent l'option « verres polarisants ». Y a-t-il un intérêt à avoir des verres polarisants ou est-ce un argument purement marketing ?

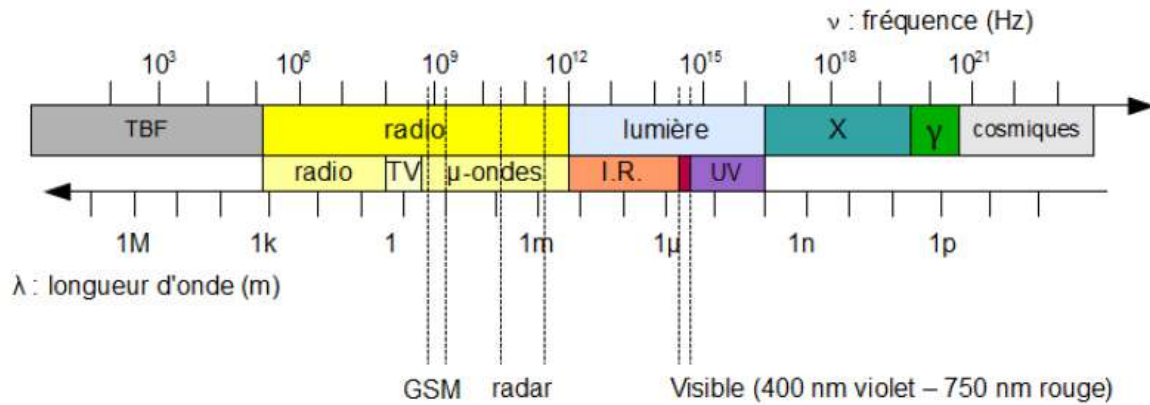
Annexe : le spectre des ondes électromagnétiques

FIGURE 1.11 – Une vue d'ensemble des fréquences électromagnétiques (crédit : académie de Grenoble)

Chapitre 2

Émission dipolaire et diffusion

Sommaire

1	Petit aparté : résoudre les équations de Maxwell ?	39
1.1	Cas simples connus	39
1.2	Résolution générale dans le cas statique	41
1.3	Du dipôle électrostatique au dipôle oscillant	41
1.4	Potentiel retardé : solution dynamique aux équations de Maxwell	42
2	Développement multipolaire	42
2.1	Développement multipolaire d'une distribution statique	42
2.2	Développement multipolaire dynamique	45
2.3	Expression des champs rayonnés par le dipôle oscillant	47
3	Rayonnement dipolaire	48
3.1	Domaines d'étude	48
3.2	Puissance rayonnée par le dipôle oscillant	50
3.3	Cas d'une antenne	51
4	Diffusion de la lumière par un milieu	53
4.1	Rayonnement dans le modèle de l'électron élastiquement lié	53
4.2	Diffusion de la lumière du Soleil et couleur du ciel	56
4.3	Cas des milieux denses (★)	58

Objectifs

Après s'être intéressé à la propagation dans le vide des ondes électromagnétiques, on se pose la question de comment émettre une telle onde. Les charges en mouvement produisent des courants, mais nous verrons que pour émettre une onde, ces charges doivent être de plus *accélérées*.

Nous allons étudier un émetteur élémentaire : le dipôle électrique oscillant, et nous nous focaliserons sur l'onde générée à grande distance. Cette étude permettra de comprendre la physique de la génération d'ondes électromagnétiques à partir de charges accélérées dans un cas simple.

Ensuite, nous aborderons la question du phénomène de diffusion de la lumière. Dans les milieux diélectriques, les molécules peuvent se polariser sous l'action d'un champ électrique ; mais si le champ appliqué est oscillant, les dipôles oscilleront également ; et d'après la première partie émettront alors un rayonnement électromagnétique. Différents régimes de diffusion apparaîtront, dont le régime de Rayleigh.

1 Petit aparté : résoudre les équations de Maxwell ?

1.1 Cas simples connus

Charge seule Dans le cas de distributions simples de charges, les champs et potentiels sont bien connus. Au secondaire (1^{ère} spécialité Physique-Chimie), vous avez rencontré la loi de Coulomb qui donne la force qui

s'exerce entre deux charges. Plus tard, par l'expression $\vec{F} = q\vec{E}$, vous en avez déduit l'expression du champ électrique créé en M par une charge ponctuelle q placée en O (notant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{e}_r = \vec{r}/r$) :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.1)$$

Avec la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$, on en déduit le potentiel (à une constante près qu'on prendra nulle) créé par une charge seule dans l'espace :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.2)$$

Le champ créé décroît en $1/r^2$ et le potentiel en $1/r$.

Dipôle électrique Vous avez également étudié la situation de deux charges opposées $\pm q$, positionnée en N pour $-q$ et P pour $+q$; on note a la distance entre les deux charges. La charge totale de la distribution est nulle, mais elle crée néanmoins un champ électrique. À grande distance du dipôle ($r \gg a$), ce champ décroît en $1/r^3$ (l'expression précise est sans importance), plus vite que celui d'une charge ponctuelle. Le potentiel s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.3)$$

avec $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ un vecteur appelé moment dipolaire de la distribution, de norme $p = qa$.

Définition

Un dipôle présente un *moment dipolaire*

$$\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP}} \quad (2.4)$$

et crée un champ électrostatique qui décroît en $1/r^3$, là où le champ d'une particule chargée décroît en $1/r^2$ (cf. tableau 2.1).

Dans toute la suite, on se placera en coordonnées sphériques, O étant le milieu du segment $[NP]$, et on a choisit d'orienter l'axe (Oz) suivant \overrightarrow{NP} comme sur la figure 2.2.

Remarque On reviendra sur l'origine microscopique des dipôles dans le chapitre suivant.

Si leur expression exacte n'est pas indispensable, retenir les dépendances en r globales des champs et potentiels est important. Elles sont rappelées dans le tableau 2.1 pour les champs et potentiels d'une charge ponctuelle et d'un dipôle.

Distribution	Potentiel électrique V	Champ électrique \vec{E}
Monopolaire	$\propto 1/r$	$\propto 1/r^2$
Dipolaire	$\propto 1/r^2$	$\propto 1/r^3$

TABLE 2.1 – Cas des distributions statiques de charge : dépendance en la distance des champs et potentiels électriques pour les distributions usuelles : monopolaire et dipolaire.

Et pour des distributions plus complexes ?

1.2 Résolution générale dans le cas statique

Soit une distribution de charges \mathcal{D} quelconque. Pour l'instant, plaçons-nous en régime statique, nous regarderons le régime dynamique à la section suivante. Les charges étant immobiles, cette distribution ne crée pas de courant, donc pas de champ magnétique. En revanche, elle crée un champ électrique dans l'espace. À quoi ressemble ce champ ? On sait que le champ d'une particule chargée décroît comme $1/r^2$. Est-ce le cas pour une distribution générale ?

Le potentiel électrique d'une distribution de charge en un point M de l'espace est *a priori* très complexe à déterminer. Découpons-le en éléments de volume infinitésimaux. Le potentiel créé en M par une charge élémentaire $dQ = \rho(P)dV$ placée en $P \in \mathcal{D}$ vaut

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)dV}{PM}. \quad (2.5)$$

Mais les équations de Maxwell sont linéaires, donc pour obtenir le potentiel total de la distribution, il suffit de sommer chacun des potentiels créés par les charges élémentaires, c'est-à-dire :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{PM} dV. \quad (2.6)$$

Dans le cas statique, la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ permet d'en déduire \vec{E} . Excellent, nous avons ainsi résolu les équations de Maxwell pour une distribution de charge quelconque ! C'est fantastique ! ... Cependant, cette intégrale triple est très complexe à résoudre, et on n'obtient une solution analytique que dans des cas très symétriques (ce qui se calcule plutôt à partir du théorème de Gauss que de cette intégrale)... Si l'expression algébrique est simple, son utilisation concrète est très complexe.

1.3 Du dipôle électrostatique au dipôle oscillant

Puisque les distributions ont souvent une charge nulle, on comprend avec le résultat précédent qu'il est d'un intérêt crucial d'étudier les distributions dipolaires. Or une telle distribution n'est caractérisée *que* par son moment dipolaire. On peut donc la modéliser comme deux charges électriques $+q$ et $-q$ placées telles que leur moment dipolaire est le même que celui de la distribution d'intérêt.

On généralise le concept de moment dipolaire à des dipôles non rigides, pour lesquels la distance a peut dépendre du temps. On écrira :

$$\vec{p}(t) = qN\vec{P}(t) = qa(t)\vec{e}_z = p(t)\vec{e}_z. \quad (2.7)$$

Définition

On appelle **dipôle de Hertz** un dipôle dont le moment oscille sinusoïdalement au cours du temps. En notation complexe, on a

$$\underline{\vec{p}}(t) = p_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_z. \quad (2.8)$$

Remarque En mettant un grand nombre de dipôles élémentaires de ce type bout à bout, on modélise ainsi un fil conducteur parcouru par un courant variable, c'est-à-dire une antenne. Nous reviendrons sur ce cas.

Remarque En choisissant une dépendance sinusoïdale en temps, on ne limite pas l'étude, puisque l'analyse de Fourier permet de ramener n'importe quelle évolution temporelle à une superposition de fonctions sinusoïdales.

Remarque Les distributions statiques (charges ou dipôles) créent des champs statiques dans l'espace, qui décroissent avec r . Par contre elles ne créent pas de champ magnétique, donc le vecteur de Poynting est strictement nul : l'énergie est confinée près des charges, il n'y a aucun flux d'énergie.

Dans toute la suite, l'objectif est de calculer le champ électromagnétique rayonné par un dipôle **oscillant** en un point M de l'espace, ainsi que la puissance électromagnétique qui est transportée loin du dipôle. On cherche en particulier à montrer qu'il s'agit bien d'un phénomène de rayonnement : la puissance émise peut s'échapper à l'infini de la source.

1.4 Potentiel retardé : solution dynamique aux équations de Maxwell

L'expression (2.6) du potentiel d'une distribution est valable dans le cas d'une distribution statique. Qu'en est-il si l'on considère maintenant que les charges peuvent être mobiles, et ainsi la distribution dépend de l'instant t comme pour le dipôle de Hertz ? Une remarque très importante est que les ondes se propagent à une vitesse finie. Ainsi, une modification de la distribution à l'instant t ne pourra avoir un effet sur le champ en un point M de l'espace qu'à un instant ultérieur $t' > t$. Cette remarque fondamentale (le respect de la causalité) est à l'origine du phénomène de rayonnement que nous allons voir.

Pour calculer le potentiel au point M , nous avons sommé tous les potentiels élémentaires $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{PM}$. Cependant, si une perturbation des charges se produit en P , elle ne sera détectée en M qu'après le temps que l'onde se soit propagée, donc après un temps $t_{PM} = \frac{PM}{c}$. Ainsi, le potentiel en un point M à l'instant t est influencé par la densité de charge au point P mais à l'instant antérieur $t - t_{PM}$.

Potentiel retardé

On montre que le potentiel scalaire dans une situation dépendante du temps s'écrit :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dV. \quad (2.9)$$

Cette expression est appelée **potentiel retardé**.

Compétences à maîtriser

- ✓ Maîtriser les cas simples des distributions monopolaire et dipolaire.
- ✓ Justifier la présence d'un temps retardé dans l'expression du potentiel retardé.
- ✓ Maîtriser la définition d'un dipôle, en particulier dans le cas simple de deux charges.

2 Développement multipolaire

2.1 Développement multipolaire d'une distribution statique

Une autre approche possible pour tirer de la physique de cette équation est de faire un développement dans un cas limite. Supposons par exemple que le point M se situe à grande distance de la distribution de charge : soit a la taille typique de la distribution et $r = OM$, alors $r \gg a$. La situation est présentée sur la figure 2.1.

Définition

L'**approximation dipolaire** consiste à négliger l'extension spatiale de la distribution devant la distance d'observation : $a \ll r$.

Cette approximation sera *toujours* vérifiée expérimentalement pour un dipôle microscopique.

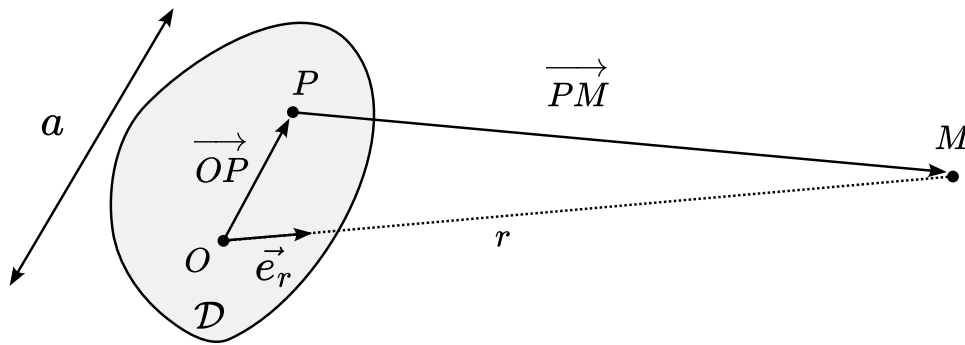


FIGURE 2.1 – Schéma d'une distribution de charge quelconque. Le point M de calcul du champ est loin de cette distribution, au sens où $r \gg a$.

Développements limités

Les développements limités sont un outil mathématique essentiel en physique. L'essence même de la physique est de modéliser le monde qui nous entoure en se limitant aux caractéristiques pertinentes pour l'aspect étudié et autant que possible contrôler les approximations effectuées. On utilise donc constamment des développements limités, qui reviennent à transformer une fonction compliquée d'un paramètre en une fonction affine. L'angle du pendule n'est pas trop grand ? On pourra approximer $\sin \theta \approx \theta$ dans l'équation du mouvement et résoudre. On explore le voisinage du minimum d'une énergie potentielle ? On pourra faire un développement limité à l'ordre 2 et ne garder que le terme quadratique.

Les développements limités se font avec un **nombre sans dimension**. En maths les grandeurs n'ont pas de dimension, mais en physique si. Avant tout développement, il est indispensable de trouver ce nombre sans dimension qui sera petit devant 1 (99% des développements en physique se font près de 0). Un angle pour le pendule, un rapport de distance x/L pour l'énergie potentielle, un paramètre adimensionné comme le nombre de Reynolds, etc.

Certains développements limités reviennent très souvent en physique, il est indispensable de les connaître à l'ordre 1 au minimum, voire à l'ordre 2. Soit x une variable **sans dimension**, on écrit les développements « à la physicienne » (sans les $o(x^n)$)

$$\frac{1}{1-x} \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$(1+x)^n \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots \quad (2.11)$$

$$e^x \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (2.12)$$

$$\sin(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (2.13)$$

$$\cos(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

Ces développements seront supposés connus !

Entraînez-vous à les utiliser ! Pour les aventureux, voici quelques développements corsés pour vous entraîner : https://colasbd.github.io/cdc/cahier_de_calcul_enonces_v12.pdf.

Dans ce cas, nous pouvons développer PM :

$$PM = \sqrt{(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2} = (OP^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \vec{r} + r^2)^{1/2} = r \left(1 - 2\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_r}{r} + \frac{OP^2}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

La distance OP est nécessairement plus petite que a la taille de la distribution. Donc quel que soit P , on peut faire un développement limité de PM , avec le petit paramètre OP/r . L'équation précédente est de la forme $(1 - 2x \cos \alpha + x^2)^{1/2}$ où α est l'angle \widehat{MOP} . En faisant un développement limité à l'ordre 1, le troisième terme (d'ordre 2) peut être ignoré et on obtient

$$PM = r \left(1 - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{r}}{r^2} + \dots \right) = r - \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_r + \dots \quad (2.17)$$

Les termes suivants étant au moins d'ordre $1/r^3$. On peut écrire également :

$$\frac{1}{PM} = \left[r \left(1 - \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_r}{r} + \dots \right) \right]^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_r}{r} + \dots \right) \quad (2.18)$$

En réintégrant ce développement dans l'expression du potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P) dV}_{=Q} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P) \overrightarrow{OP} dV}_{=\vec{p}} \cdot \vec{e}_r + \dots \quad (2.19)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots \quad (2.20)$$

Le potentiel s'écrit donc comme une série de termes qui décroissent de plus en plus vite avec r , en $1/r^n$, développement valable lorsque $r \gg a$.

Dans le premier terme on reconnaît la charge Q totale de la distribution. S'il est non nul, à grande distance c'est ce terme qui domine. Ainsi, suffisamment loin d'une distribution, son champ électrique se comporte comme celui d'une charge ponctuelle Q .

Cependant, l'interaction électromagnétique étant très forte à notre échelle (relativement à la gravitation), il est rare d'avoir des objets naturellement chargés. Cette charge totale est donc souvent nulle, et c'est donc le terme d'après qui domine dans l'expression du potentiel. Ce terme fait apparaître un vecteur caractéristique de la distribution \vec{p} qui est le *moment dipolaire*.

Définition

On appelle **moment** du développement multipolaire les termes successifs qui apparaissent dans le développement des potentiels.

Le terme d'ordre 0 est appelé **monopôle** ou **charge** de la distribution et vaut :

$$Q = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(P) dV. \quad (2.21)$$

Le terme suivant est appelé **moment dipolaire électrique** et s'écrit

$$\vec{p} = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P) \overrightarrow{OP} dV. \quad (2.22)$$

C'est un barycentre pondéré des charges du système. En continuant le développement limité, on obtiendrait les termes quadripolaire, octupolaire, etc.

Cas particulier Dans le cas d'une distribution très simple avec une charge $+q$ au point P et $-q$ au point N , la charge totale est nulle et le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{p} = q\overrightarrow{OP} + (-q)\overrightarrow{ON} = q\overrightarrow{NP}. \quad (2.23)$$

On retrouve la définition du moment dipolaire vue l'an dernier.

Ainsi, comme très souvent $Q = 0$, c'est ce vecteur \vec{p} qui caractérise la distribution de charge à l'ordre le plus bas, la distribution est dite **dipolaire**. De l'expression du potentiel électrique (2.20), on peut déduire le champ électrique par $\vec{E} = -\text{grad } V$. On retrouve ainsi les formules connues du cours de l'an dernier rappelées dans la partie précédente.

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}) \quad (2.24)$$

Remarque D'après la définition, le vecteur \vec{p} dépend du choix du point O . O étant arbitraire, \vec{p} ne semble donc pas une grandeur réellement caractéristique de la distribution. Néanmoins, dans la situation où la charge totale Q est nulle, alors \vec{p} est indépendant de O . En effet, supposons qu'on le définisse avec une autre origine O' :

$$\iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P)\overrightarrow{O'P} dV = \underbrace{\iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P)\overrightarrow{O'O} dV}_{=Q\overrightarrow{O'O}=\vec{0}} + \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P)\overrightarrow{OP} dV = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P)\overrightarrow{OP} dV \quad (2.25)$$

Remarque Dans le cas d'une distribution neutre, le moment dipolaire peut facilement se réécrire $\vec{p} = Q_+\overrightarrow{NP}$ où N et P sont respectivement les barycentres des charges négatives et positives, et Q_+ la somme des charges positives. En effet :

$$\vec{p} = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho(M)\overrightarrow{OM} dV = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho_+(M)\overrightarrow{OM} dV + \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho_-(M)\overrightarrow{OM} dV \quad (2.26)$$

où l'on a introduit $\rho_+(M) = \max(\rho(M), 0)$, $\rho_-(M) = \min(\rho(M), 0)$. Regardons par exemple le premier terme :

$$\iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho_+(M)\overrightarrow{OM} dV = \underbrace{\iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho_+(M)\overrightarrow{OP} dV}_{=Q_+\overrightarrow{OP}} + \underbrace{\iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho_+(M)\overrightarrow{PM} dV}_{=\vec{0}} \quad (2.27)$$

le second terme est nul, par définition d'un barycentre. Nous avons peut-être plus l'habitude de le voir avec des sommes discrètes : si P est barycentre des charges q_i placées en M_i , alors $\sum_i q_i \overrightarrow{PM}_i = \vec{0}$.

De même pour la partie négative. Maintenant, comme la distribution est globalement neutre, on a $Q_+ = -Q_-$, d'où :

$$\vec{p} = Q_+(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) = Q_+\overrightarrow{NP}. \quad (2.28)$$

2.2 Développement multipolaire dynamique

On considère maintenant une distribution dynamique de charges. Comment la dynamique influence-t-elle le potentiel électrique au point M ? Il faut partir cette fois-ci du potentiel retardé (2.9) pour faire un développement multipolaire. Celui-ci est plus délicat, puisque PM intervient dans l'amplitude comme précédemment, mais également dans l'argument temporel de ρ :

$$\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) \approx \rho\left(P, t - \frac{r}{c} + \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_r}{c}\right) \quad (2.29)$$

Le temps $\tau = t - r/c$ est indépendant du point P . C'est l'instant *retardé*, lié à la vitesse finie de propagation de l'information entre la distribution et le point de calcul du champ.

Pour aller plus loin, il faut pouvoir faire un développement limité de ρ ; et pour cela il faut pouvoir considérer $\frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{c}$ comme un temps petit devant le temps de variation typique de ρ . Dans le cas d'une oscillation temporelle sinusoïdale de ρ , ce temps typique de variation est la période de l'onde T . On doit donc avoir :

$$\frac{a}{c} \ll T \iff a \ll \lambda \quad (2.30)$$

Définition

L'*approximation des régimes quasi-stationnaires* (ARQS) suppose que la taille caractéristique a de la distribution est petite devant la longueur d'onde λ de la perturbation :

$$\boxed{a \ll \lambda} \quad (2.31)$$

Si cette hypothèse est vérifiée, cela signifie que tous les éléments de la distribution oscillent en phase, l'information se transporte de façon quasi-instantanée à l'échelle de la distribution.

Dans le cadre d'un dipôle de Hertz, la taille de la distribution est directement reliée à la vitesse de la charge mobile v : $2a = vT$. L'ARQS revient alors à dire que la charge se déplace à des vitesses non-relativistes $v \ll c$.

Dans une distribution de taille a vérifiant cette hypothèse, toutes les charges verront le même champ à l'instant t , sans déphasage relatif dû à leur position relative.

Dans le cadre de l'ARQS, on peut faire un développement de ρ près de $\tau = t - r/c$. On utilise l'expression habituelle à l'ordre 1 : $f(t) \approx f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)$:

$$\rho\left(P, \tau + \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{c}\right) \approx \rho(P, \tau) + \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{c} \dot{\rho}(P, \tau) \quad (2.32)$$

où $\dot{\rho}$ est la dérivée temporelle de ρ , évaluée au temps retardé $t = \tau$.

Reprenons alors l'expression du potentiel retardé (2.9) avec l'approximation de l'amplitude et de ρ :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \left(\rho(P, \tau) + \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{c} \dot{\rho}(P, \tau) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{r} \right) d\mathcal{V} \quad (2.33)$$

$$= \frac{Q(\tau)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \rho(P, \tau) \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{r} d\mathcal{V} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\overline{OP} \cdot \vec{e}_r}{c} \dot{\rho}(P, \tau) d\mathcal{V} + \dots \quad (2.34)$$

$$= \frac{Q(\tau)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}(\tau) \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}(\tau) \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r c} \quad (2.35)$$

À la seconde ligne, on a négligé le terme d'ordre 2 en OP/r . À la troisième ligne, on a sorti la dérivée temporelle de l'intégrale, et retrouvé l'expression du moment dipolaire \vec{p} pour le troisième terme. De plus, par conservation de la charge, on peut simplement écrire $Q(\tau) = Q$.

L'équation (2.35) présente des termes similaires au développement dans le cas statique : un terme monopolaire statique, un terme dipolaire habituel, mais où le moment dipolaire est évalué au temps retardé $t - r/c$. En revanche, cette équation fait apparaître un nouveau terme, lié à la dérivée première du moment dipolaire $\dot{\vec{p}}$.¹

1. Puisque les charges sont en mouvement, une distribution de courant est présente et crée un champ magnétique. Dans le développement multipolaire, à côté des termes électriques apparaissent de nouveaux termes dipolaire, quadripolaire, octupolaire qu'on qualifie de « magnétiques »...

Remarque Il est crucial de distinguer l'émetteur du système complet {émetteur + M} en terme d'approximation : on fait l'hypothèse d'ARQS pour l'émetteur (tous les points de l'émetteur sont en phase), mais on ne dit rien de l'émetteur par rapport au point M . Nous verrons au contraire que la situation pertinente est lorsque l'émetteur et le point M ne sont *pas* en phase, donc lorsque l'ARQS ne s'applique pas globalement au système {émetteur + M}.

Question d'investigation

L'électricité transportée par le réseau électrique français est une onde électromagnétique. Peut-on appliquer l'ARQS sur le territoire de l'hexagone ? de l'union européenne ?

2.3 Expression des champs rayonnés par le dipôle oscillant

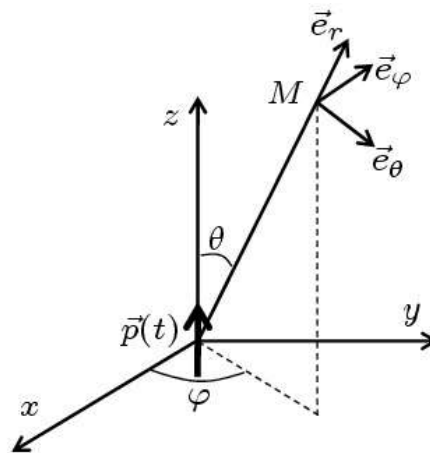


FIGURE 2.2 – Le dipôle de Hertz

L'obtention du potentiel $V(M, t)$ est un premier pas pour déterminer les champs électriques. Il faudrait maintenant déterminer le potentiel vecteur \vec{A} (par calcul direct ou en utilisant la jauge de Lorenz), puis calculer $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Comme c'est assez fastidieux, on donne directement le résultat ci-dessous des champs électrique et magnétique, avec les notations de la figure 2.2 en coordonnées sphériques :²

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} 2\left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2c}\right) \cos \theta & / \vec{e}_r \\ \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2}\right) \sin \theta & / \vec{e}_\theta \\ 0 & / \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} 0 & / \vec{e}_r \\ 0 & / \vec{e}_\theta \\ \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc}\right) \sin \theta & / \vec{e}_\varphi \end{cases}, \quad (2.36)$$

où le moment p est évalué à l'instant retardé $t - r/c$. En régime sinusoïdal avec la notation complexe ($\dot{p} \rightarrow -i\omega p$), on a alors

$$\vec{E} = \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{4\pi\epsilon_0} p_0 \begin{cases} 2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2c}\right) \cos \theta \\ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2c} - \frac{\omega^2}{rc^2}\right) \sin \theta \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{i\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{rc}\right) \sin \theta \end{cases}. \quad (2.37)$$

Plusieurs termes apparaissent dans les expressions des champs, qui sont différents de préfacteurs $r \frac{\omega}{c} = kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$. On comprend maintenant l'intérêt de séparer l'espace en plusieurs zones, selon la valeur du rapport r/λ .

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir justifier la notion de développement multipolaire, ainsi que des deux premiers moments et les dépendances spatiales des champs et potentiels.

2. Voir par exemple J.P. Perez et al., « Électromagnétisme- Fondements et applications », Éd. Dunod.

- ✓ Savoir mener un développement multipolaire à l'ordre 2 dans le cas statique
- ✓ Connaître et justifier les deux approximations nécessaires

3 Rayonnement dipolaire

3.1 Domaines d'étude

Trois distances caractéristiques interviennent dans l'étude du rayonnement d'un dipôle oscillant :

- la taille maximale a du dipôle ;
- la longueur d'onde associée à l'onde émise par le dipôle $\lambda = cT = c\frac{2\pi}{\omega}$;
- la distance d'observation $r = OM$.

Découpage de l'espace en différentes zones

Les hypothèses précédentes assurent que $r \gg a$ et $\lambda \gg a$. Mais que dire de la relation d'ordre entre r et λ ? Elle est complètement libre. On peut donc séparer l'espace en trois régions :

- la **zone proche** ou **zone statique** : $r \ll \lambda$. Dans cette zone, le temps r/c mis par l'onde pour atteindre le point M est très petit devant la période d'oscillation de l'onde λ/c . On peut considérer la propagation de l'information comme instantanée : on est dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) où la vitesse des ondes électromagnétiques est considérée comme infinie. Autrement dit, tout changement de la source d'émission de l'onde se répercute instantanément au point M d'intérêt.
- la **zone intermédiaire** : $r \sim \lambda$, une zone intermédiaire dont il est difficile de tirer une caractéristique physique propre.
- la **zone lointaine** ou **zone de rayonnement** : $r \gg \lambda$. C'est la zone dans laquelle nous travaillerons dans ce chapitre ; dans cette zone, l'approximation des régimes quasi-stationnaires ne s'applique pas : le temps de propagation de la lumière est grand devant la période d'oscillation de l'onde. Autrement dit, si une perturbation survient à la source d'émission de l'onde, le temps que l'onde arrive en r n'est pas négligeable ; lorsque l'information arrive au point M , la phase au niveau de la source peut avoir complètement changé. La durée de propagation de l'information doit être considérée.

Ordres de grandeurs Pour être dans la zone de rayonnement, donc dans le cadre de l'approximation $a \ll \lambda \ll r$, il faut :

- en optique, $\lambda \approx 500$ nm, donc r doit être de l'ordre de quelques millimètres (c'est très facile expérimentalement) ;
- pour les ondes radio FM, λ est de l'ordre de quelques mètres, donc r doit être de l'ordre de quelques kilomètres ;
- pour les ondes radio GO, λ est de l'ordre de quelques kilomètres, donc r doit être de l'ordre d'au moins quelques dizaines, voire centaines de kilomètres pour vérifier l'approximation.

Zone proche ou zone statique Dans la zone où $r \ll \lambda$, ce sont les termes avec la plus grande puissance de λ/r qui vont dominer. Les champs s'écrivent

$$\vec{E} = \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{4\pi\epsilon_0 r^3} p_0 \begin{cases} 2 \cos \theta & / \vec{e}_r \\ \sin \theta & / \vec{e}_\theta \\ 0 & / \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2} p_0 e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \begin{cases} 0 & / \vec{e}_r \\ 0 & / \vec{e}_\theta \\ \sin \theta & / \vec{e}_\varphi \end{cases}. \quad (2.38)$$

Le champ \vec{E} a la même expression que dans le cas d'un dipôle statique (c'est la version projetée de (2.24)), où on a simplement remplacé $p \rightarrow p(t - r/c)$. Il s'agit donc du même champ que celui créé par un dipôle statique, dont l'amplitude à l'instant t dépend de l'amplitude du dipôle à l'instant retardé $t - r/c$.

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont en quadrature (comme l'atteste le facteur i entre \vec{E} et \vec{B}), donc le vecteur de Poynting résultant est exactement nul. En effet :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \propto \operatorname{Re}(i) = \vec{0}. \quad (2.39)$$

Donc ces champs ne rayonnent pas d'énergie. Ils ne nous intéressent pas dans cette partie, mais peuvent être très intéressants dans d'autres contextes (ex : la microscopie en champ proche).

Zone lointaine ou zone de rayonnement Dans le cas $r \gg \lambda$, ce sont les termes avec la plus petite puissance de λ/r qui dominent. Les champs se simplifient :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^2} p_0 \sin \theta e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^3} p_0 \sin \theta e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{e}_\varphi, \quad (2.40)$$

où si on revient en notations réelles :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{rc^2} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi. \quad (2.41)$$

Remarques

- L'expression (2.41) donne un résultat surprenant : les champs dépendent de l'accélération du dipôle. Sans accélération (des charges statiques ou à vitesse constante comme dans un courant électrique continu), ces champs seraient nuls. On retiendra que seules les charges *accélérées* rayonnent de l'énergie.
- L'accélération est prise au temps $t - \tau$ où $\tau = r/c$ est le temps de propagation de O à M . On dit que l'on a des *champs retardés* dus à la propagation du rayonnement à la vitesse de la lumière depuis le dipôle (placé à l'origine O) jusqu'au point M .
- Les champs décroissent en $\frac{1}{r}$ et non en $\frac{1}{r^2}$ ou $\frac{1}{r^3}$ comme les champs dans la zone statique. Ils décroissent donc nettement moins vite !

Champ électrique	Charge statique \vec{E}	Dipôle statique	Dipôle oscillant
Dépendance en r	$\propto 1/r^2$	$\propto 1/r^3$	$\propto 1/r$

TABLE 2.2 – Cas des distributions dynamiques : le champ d'un dipôle oscillant varie en $1/r$ et non plus en $1/r^3$.

Caractéristiques du champ électromagnétique à grande distance

1. Les champs (\vec{E}, \vec{B}) ont une phase en $kr - \omega t$ et une amplitude en $1/r$. Les composantes E_θ et B_φ ressemblent donc à des ondes sphériques (mais ce n'en sont pas à cause du point suivant).
2. Les champs ne dépendent pas que de r , ils sont proportionnels à $\sin \theta$. Ainsi, l'émission est *directionnelle* (c'est-à-dire non isotrope) : l'amplitude de l'onde émise dépend de la direction d'émission. Retenons qu'elle est nulle dans la direction de (Oz) (le dipôle ne rayonne pas sur son axe) et maximale dans le plan équatorial (perpendiculaire à \vec{p}).
3. On observe que le champ électromagnétique vérifie $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. En particulier, les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un *trièdre direct* (voir figure 2.3) et $B_\varphi = \frac{E_\theta}{c}$. En se plaçant loin, la décroissance des champs rayonnés en $\frac{1}{r}$ peut être négligée et une petite portion de surface d'onde ressemble à un plan : on dit que l'onde a une *structure locale d'onde plane*.
4. Le vecteur \vec{E} est selon \vec{e}_θ : l'onde rayonnée est donc *polarisée rectilignement*.
5. On peut noter que les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} vérifient bien les propriétés de symétries habituelles ; quel que soit le point M de l'espace, le plan (M, Oz) est un plan de symétrie pour la distribution de charge et de courant. Par le principe de Curie, les champs \vec{E} et \vec{B} doivent respecter ces propriétés, et en effet : le vecteur \vec{E} selon \vec{e}_θ est contenu dans ce plan et le vecteur \vec{B} selon \vec{e}_φ est orthogonal.

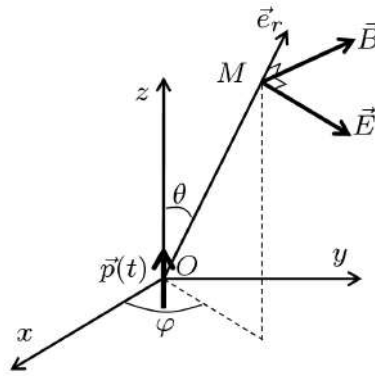


FIGURE 2.3 – Structure d'onde localement plane de l'onde émise à grande distance par le dipôle oscillant

3.2 Puissance rayonnée par le dipôle oscillant

Puissance rayonnée par unité de surface

Le vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \sin^2 \theta \cos^2 \left[\omega \left(\frac{r}{c} - t \right) \right] \vec{e}_r. \quad (2.42)$$

D'où l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \sin^2 \theta \vec{e}_r. \quad (2.43)$$

La puissance moyenne rayonnée par unité de surface, dans la direction radiale, est donc :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \right\rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_r = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \sin^2 \theta. \quad (2.44)$$

On retiendra en particulier que cette puissance surfacique :

- est indépendante de φ , ce qui est normal étant donné que le problème est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) ;
- elle dépend de θ puisqu'elle est proportionnelle à $\sin^2 \theta$. Le rayonnement du dipôle est anisotrope : la puissance rayonnée par unité de surface est nulle dans la direction du dipôle, maximale dans le plan équatorial.
- est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$;
- est proportionnelle à ω^4 .

Diagramme de rayonnement

Définition

On définit le **diagramme de rayonnement** comme la carte donnant les variations spatiales de la puissance rayonnée. Pour chaque direction (θ, φ) de l'espace, on trace un rayon proportionnel à la puissance dans cette direction.

Dans le cas du dipôle électrique, le diagramme de rayonnement est donné par la surface $f(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta$, représentée sur la figure 2.4. f ne dépendant pas de φ , la représentation est invariante par rotation selon φ .

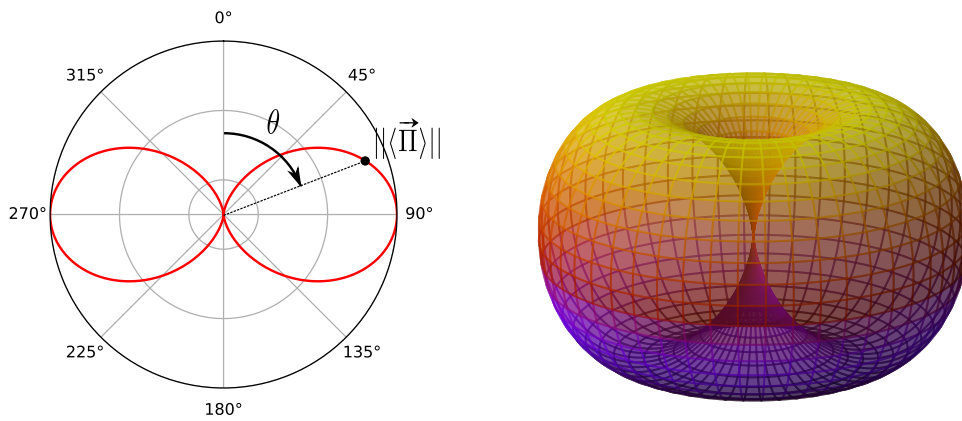


FIGURE 2.4 – Diagramme de rayonnement du dipôle oscillant dans un plan $\varphi = \text{cste}$. À gauche une coupe dans un plan $\varphi = \text{cste}$, de ce diagramme on déduit la puissance surfacique rayonnée dans une direction. À droite une vue 3D de ce diagramme.

Puissance totale rayonnée

Calculons le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère S_r de rayon r :

$$\mathcal{P} = \oiint_{S_r} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.45)$$

En utilisant que $\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}}. \quad (2.46)$$

La puissance rayonnée à travers une sphère centrée sur le dipôle oscillant est donc *indépendante de son rayon* r . L'énergie totale propagée par l'onde se conserve : le vide est bien transparent (ouf, c'était une hypothèse de départ !). Les décroissances en $\frac{1}{r}$ des champs et en $\frac{1}{r^2}$ du vecteur de Poynting ne correspondent pas à une absorption de l'onde, mais à la répartition de la puissance sur une surface qui croît en r^2 . L'énergie totale se propage à l'infini, il s'agit bien d'un transport d'énergie par rayonnement.

3.3 Cas d'une antenne

On utilise dans la vie courante des antennes pour émettre ou recevoir des ondes électromagnétiques. Ces antennes sont tout simplement des fils électriques parcourus par des courants $I(t)$ sinusoïdaux, et l'accélération des charges crée une émission d'onde électromagnétique. Un tel émetteur est de taille macroscopique, et très souvent sa taille est comparable à celle de la longueur d'onde de l'onde émise (on utilise souvent des antennes dites « demi-onde » par exemple). Donc l'approximation non-relativiste (qui est l'approximation des régimes quasi-stationnaires pour l'émetteur) n'est plus valable. Il faut considérer l'antenne comme une assemblée de dipôles, qui peuvent voir des champs excitateurs déphasés les uns par rapport aux autres.

Déterminer le champ rayonné par une antenne est un problème compliqué, puisque si un courant $I(t)$ traverse l'antenne, un champ électromagnétique peut être créé et donc de l'énergie va être prélevée au circuit électrique, ce qui va modifier $I(t)$, et donc le champ, etc. C'est un problème auto-cohérent. Nous n'allons donc pas essayer de le résoudre ici.

On mentionnera cependant que l'optimisation d'une antenne dépend de nombreux paramètres : on peut souvent émettre une puissance nominale donnée, avec le meilleur rendement et avec une polarisation de l'onde émise bien déterminée (la surface de la Terre étant conductrice, le choix de la polarisation est crucial si on veut limiter les pertes). On peut aussi vouloir avoir des antennes avec émission quasi-isotropes (cas des antennes 4G par exemple), ou au contraire une émission très directionnelle (cas de la 5G). L'isotropie de l'émission est grandement influencée par la taille de l'antenne relativement à la longueur d'onde émise. La figure 2.5 montre

des diagrammes de rayonnements pour des antennes de différents rapports L/λ , et la figure 2.6 donne des images 3D dans deux cas.

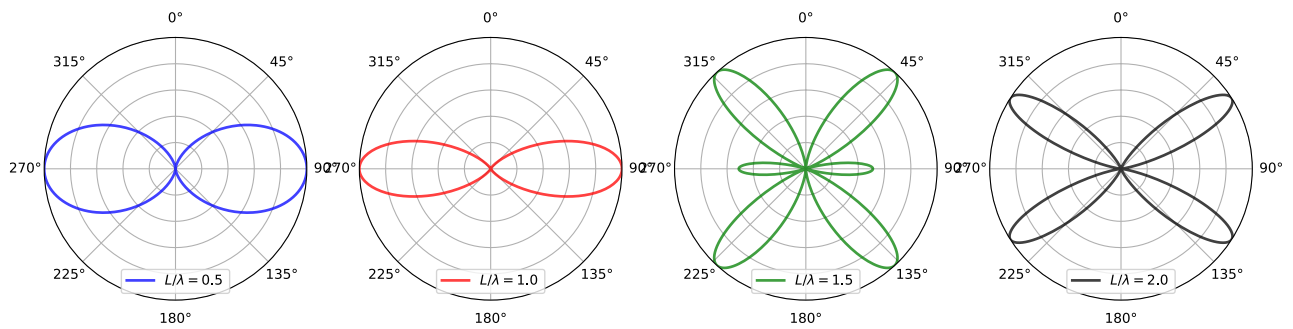


FIGURE 2.5 – Diagrammes de rayonnements d’antennes pour un rapport L/λ différent. Inspiré du site de [Ahmed Ammar](#).

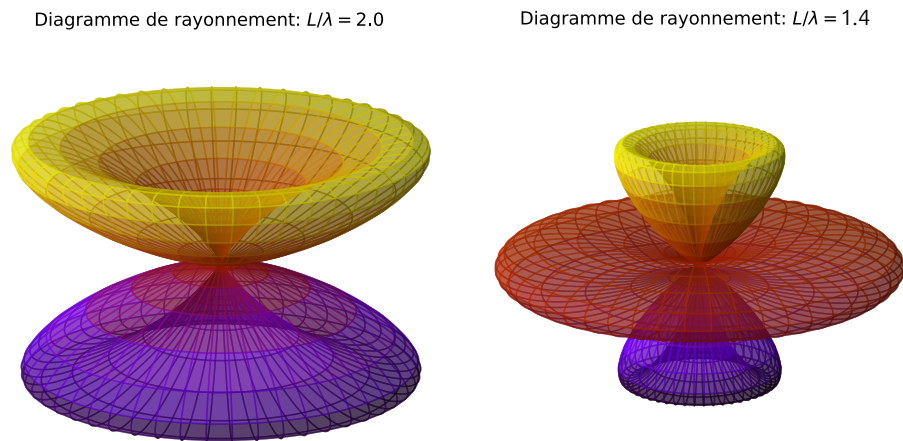


FIGURE 2.6 – Représentation 3D des diagrammes de rayonnements d’antennes. Inspiré du site de [Ahmed Ammar](#).

La puissance totale rayonnée par une antenne est délicate à calculer. Cependant, on s’attend à ce que cette puissance soit proportionnelle à l’énergie électrique du circuit, donc $\propto I_0^2$ où I_0 est l’amplitude de l’onde électrique qui traverse l’antenne. On peut écrire en toute généralité

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{2} R_{\text{ray}} I_0^2 \quad (2.47)$$

où R_{ray} est homogène à une résistance (donc d’unité SI le ohm), qu’on appelle *résistance de rayonnement*. Si on se place du point de vue du circuit électrique, toute la puissance rayonnée est une puissance perdue, exactement comme dans le cas de l’effet Joule. Il n’est pas surprenant que la puissance rayonnée s’écrive donc de façon similaire à la puissance perdue par effet Joule, avec une interprétation différente cependant (cette énergie est émise sous forme de rayonnement, et non transformée en énergie thermique).

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître et hiérarchiser les trois échelles de longueur du problème
- ✓ Identifier les différences entre une onde émise par un dipôle, et les ondes sphériques ou planes.

✓ Connaître les caractéristiques de l'émission dipolaire (anisotrope, dépendance en l'accélération, etc.)

4 Diffusion de la lumière par un milieu

Dans la section précédente, on a déterminé le champ émis par un dipôle oscillant. Il reste à comprendre par quel mécanisme celui-ci peut se mettre à osciller. Il s'agit typiquement d'une excitation par un champ extérieur qui dépend du temps ; cependant un dipôle induit par un champ électrique a une amplitude qui dépend de la fréquence d'excitation, et n'est pas nécessairement en phase avec le champ. Cela va donc donner différents régimes d'émission. On parle de *diffusion de la lumière* puisqu'un champ incident est absorbé et réémis.

Lorsqu'un milieu matériel est soumis à un champ électrique incident oscillant $\vec{E}_{\text{incident}}(t)$, les nuages électroniques des molécules absorbent le champ et se mettent à osciller, donnant naissance à des dipôles induits de moment dipolaire $\vec{p}(t)$. Ces dipôles rayonnent à leur tour un champ électrique dans l'espace : la lumière est ainsi diffusée.

Nous commencerons donc par étudier la réponse d'un électron dans un atome à un champ incident. Il s'agit d'un modèle classique incontournable, appelé modèle de Lorentz, ou de « l'électron élastiquement lié ». La question sera ensuite de comprendre comment réagit l'ensemble d'un milieu composé de ces dipôles. Nous traiterons le cas d'un milieu dilué comme l'atmosphère, et nous esquisserons le cas nettement plus complexe d'un milieu dense.

4.1 Rayonnement dans le modèle de l'électron élastiquement lié

On cherche à modéliser simplement l'effet d'un champ électrique oscillant $\vec{E}_{\text{incident}}(t)$ sur les électrons d'un atome ou d'une molécule.

Hypothèses du modèle de l'électron élastiquement lié (ou modèle de Lorentz)

- L'onde électromagnétique interagit avec toutes les charges des atomes et des molécules, mais les noyaux étant beaucoup plus lourds que les électrons, on les supposera fixes.
- Le champ d'une OPPH varie spatialement sur une distance typique de l'ordre de la longueur d'onde λ tandis que l'électron reste lié au noyau et se déplace au plus de $r_0 = 0,1$ nm. Tant que $r_0 \ll \lambda$, on pourra considérer le champ électrique incident comme uniforme à l'échelle du déplacement de l'électron (approximation valable jusqu'au domaine des rayons X) et écrire (sous forme complexe) :

$$\vec{E}_{\text{incident}}(t) = E_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_z \quad (2.48)$$

où on a choisi l'axe (Oz) selon la direction du champ exciteur.

- on peut traiter les électrons indépendamment les uns des autres, et donc on ne considère qu'un électron ici. La réponse totale sera la somme des réponses de chaque électron ;
- le système est modélisé comme un oscillateur amorti. La position $z(t)$ le long de l'axe (Oz) représente l'écart par rapport à sa position d'équilibre sans champ électrique incident. L'électron est soumis à :
 - une force de rappel $-m\omega_0^2 z \vec{e}_z$, qui traduit l'interaction électromagnétique avec le noyau. La quantité $m\omega_0^2$ est homogène à une raideur si on fait le parallèle avec un ressort ;
 - une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \dot{z} \vec{e}_z$, qui traduit toutes les causes d'amortissement : l'interaction avec le milieu ambiant et surtout l'énergie rayonnée par le dipôle oscillant sous l'action du champ électromagnétique.
- l'onde incidente étant localement plane, B a pour ordre de grandeur $\frac{E}{c}$. Dans le cadre non-relativiste $v \ll c$, on pourra donc négliger la partie magnétique de la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ devant la partie électrique $q\vec{E}$.

Rappels mathématiques : équation différentielle d'un oscillateur

Il est fréquent d'avoir à résoudre des équations différentielles en physique. L'équation la plus importante est celle d'un oscillateur. Celui-ci peut être libre ou forcé en particulier avec une excitation sinusoïdale. L'équation différentielle canonique d'un oscillateur s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (2.49)$$

où le terme \ddot{x} est lié à l'inertie, $2\lambda\dot{x}$ souvent liés aux frottements et $\omega_0^2 x$ le terme de raideur qui permet l'oscillation (ω_0 est la pulsation propre). Schématiquement, La fonction $f(t)$ peut être :

1. nulle à tout instant : l'oscillateur est en **régime libre**. Si ses conditions initiales sont non-nulles, x converge vers 0 avec ou sans oscillations à une pulsation proche de ω_0 (pseudo-pulsation en réalité);
2. nulle à $t < 0$ et constante à $t > 0$: l'oscillateur répond à une **excitation indicielle** : x converge vers la valeur finale imposée avec ou sans oscillations à sa pseudo-pulsation ;
3. varie sinusoïdalement dans le temps : on dit que l'oscillateur est forcé, ou qu'il s'agit du **régime fréquentiel**, situation qui nous intéresse ici.

Supposons une excitation sinusoïdale à une pulsation ω , par exemple $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. Quelle sera la réponse de l'oscillateur ? L'équation étant linéaire, les mathématiques imposent que la réponse du système va s'écrire $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

- la solution de l'équation homogène est exactement la solution de l'oscillateur en régime libre. Donc, si les pertes sont faibles, $x_h(t)$ est une fonction qui oscille à une pseudo-pulsation ω tout en décroissant vers 0. x_h est non-nulle que sur une période réduite, c'est un **régime transitoire**.
- reste à chercher une solution particulière $x_p(t)$. Puisque l'excitation est à la pulsation ω , on s'attend à ce que la réponse soit aussi à ω . Donc on peut chercher x_p sous la forme $x_p(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où x_0 et φ restent à déterminer. En notations complexes, cela revient à chercher une réponse $\underline{x}_p = \underline{x}_0 e^{-i\omega t}$ à une excitation $\underline{f} = f_0 e^{-i\omega t}$.

Ainsi, la réponse de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale se décompose en deux parties : (1) à temps court (le temps caractéristique dépend des paramètres du système), lorsque le régime transitoire est présent, x est la superposition de fonctions oscillants à ω et ω_0 . On peut observer des battements ; (2) à temps long, le régime transitoire disparaît et seul x_p est non-nulle, l'oscillateur répond à ω . On dit qu'on a atteint le **régime permanent**.

Implicitement, lorsqu'on s'intéresse à un système forcé, on se place toujours en régime permanent. C'est-à-dire qu'on ne parle pas du régime transitoire, et on cherche uniquement la solution particulière de l'équation.

Réponse de l'électron élastiquement lié à un champ électrique incident

On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron soumis à un champ incident $\vec{E}_{\text{incident}}(t)$, et on s'intéresse à la réponse en régime permanent. On a avec les notations complexes

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z - \frac{m}{\tau}\dot{z} - eE_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.50)$$

soit

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.51)$$

On cherche des solutions sous la forme : $z = \underline{z}_0 e^{-i\omega t}$. On obtient :

$$\underline{z}_0 \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} \right) = -\frac{eE_0}{m}. \quad (2.52)$$

D'où :

$$\underline{z}_0(\omega) = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (2.53)$$

On peut écrire la solution générale sous la forme :

$$\vec{r}(\omega) = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}. \quad (2.54)$$

On a considéré le mouvement de l'électron, mais avec le proton (supposé fixe) le système forme un dipôle de charge $q = e$. La charge négative est en M et la charge positive en O . Le vecteur allant de la charge moins vers la charge + vaut donc $\vec{MO} = -\vec{r}$. Ainsi le moment dipolaire vaut

$$\vec{p} = q\vec{MO} = \underbrace{e(-z_0)}_{\underline{p}_0(\omega)} e^{-i\omega t} \vec{e}_z \quad (2.55)$$

soit un moment dipolaire qui dépend de la pulsation incidente :

$$\underline{p}_0(\omega) = \frac{e^2 E_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (2.56)$$

L'équation (3.26) répond à la question suivante : que devient un électron confiné dans un atome lorsqu'il est excité par un champ extérieur ? En régime permanent, celui-ci oscille à la pulsation ω avec un déphasage (dont témoigne la partie imaginaire de l'expression). La réponse dépend de la fréquence d'excitation : l'électron répond d'autant mieux que ω est proche de sa pulsation propre ω_0 .

Puissance rayonnée (ou diffusée)

L'expression (2.46) donnant la puissance totale moyenne rayonnée par un dipôle est fonction d'une grandeur quadratique : p_0^2 . Il faut donc repasser en notation réelle. Si on note $\underline{p}_0 = |p_0| e^{i\varphi}$, le moment en notation réelle s'écrit $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_z$. Donc on remplace p_0^2 par $|p_0|^2$ (la phase n'a aucun impact puisque le cosinus carré se moyenne à 1/2 quelle que soit φ). Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{|p_0|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \quad (2.57)$$

avec

$$|p_0|^2 = \frac{e^4 E_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}. \quad (2.58)$$

Plus la puissance incidente est grande, plus la puissance rayonnée est grande. Donc pour isoler l'effet propre du dipôle, on peut normaliser la puissance rayonnée par la puissance incidente surfacique de l'OPPH : $\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 c$, expression de la norme du vecteur de Poynting qu'on a vu dans le chapitre 1. Le rapport obtenu est homogène à une surface.

Définition

Le rapport entre la puissance rayonnée et la puissance surfacique incidente est homogène à une surface. On le note $\sigma(\omega)$, et on l'appelle **section efficace de diffusion** :

$$\sigma(\omega) = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}. \quad (2.59)$$

Cette surface caractérise l'efficacité de la diffusion : tous les photons qui tombent sur cette surface (centrée sur l'atome diffuseur) seront diffusés. Une collision n'est donc pas une partie de billard où la section efficace serait exactement la section de la particule. Ici cette section peut-être plusieurs ordres de grandeur au-dessus

de la taille du dipôle.

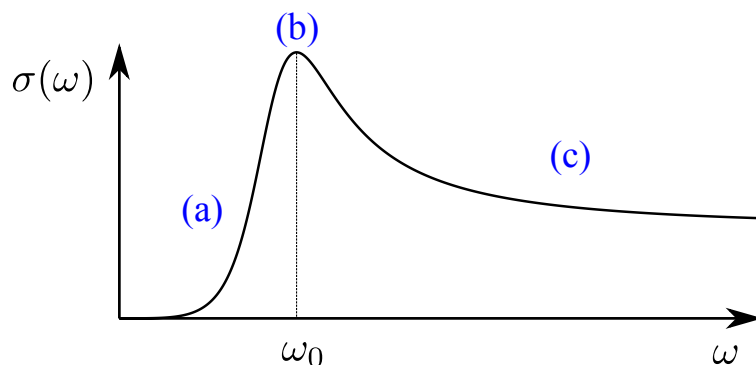


FIGURE 2.7 – Représentation de la section efficace $\sigma(\omega)$, directement proportionnelle à la puissance électromagnétique diffusée. On distingue trois régimes : (a) Rayleigh, (b) résonnant et (c) Thomson.

Sur la figure 2.7, on peut distinguer trois régimes :

- $\omega \ll \omega_0$ la **diffusion Rayleigh**, alors $\sigma(\omega) \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$. C'est un cas très instructif, et le plus fréquent aux fréquences visibles, puisque les ω_0 que l'on considère sont souvent dans l'UV ;
- $\omega \sim \omega_0$ la **diffusion résonnante** $\sigma(\omega)$ est maximale. On a ici une résonance de la section efficace, donc de l'interaction entre lumière et matière. Si le résultat qualitatif est intéressant, il doit être repris dans le cadre de la mécanique quantique pour être quantitativement cohérent ;
- $\omega \gg \omega_0$ la **diffusion Thomson**, $\sigma(\omega) \rightarrow \text{cste}$.

Question d'investigation

Ces sections efficaces sont homogènes à des surfaces. On se représente souvent des interactions comme une collision de boules de billard. En ce cas la section efficace doit être reliée à la surface de l'objet. Comparer, dans les trois régimes, cette section efficace à la surface d'un électron. D'un atome. Que peut-on en conclure ?

Du microscopique au macroscopique Ce paragraphe a permis de comprendre comment un atome isolé réagit au passage d'une onde électromagnétique, et comment il absorbe et réémet un champ. Que se passe-t-il lorsqu'il s'agit d'un ensemble de molécules ? Cela dépend de façon cruciale de la densité du milieu. Si les atomes sont très éloignés, ils réagissent comme une collection d'atomes isolés. Au contraire dans les milieux denses, il peut y avoir des interférences, des interactions, etc. qui complexifient grandement l'analyse.

4.2 Diffusion de la lumière du Soleil et couleur du ciel

Le cas d'école de la diffusion Rayleigh est celui de la diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère, qui explique la couleur bleue du ciel.

Ordres de grandeur

Dans le cas de la diffusion de la lumière du Soleil par une molécule de l'atmosphère (O_2 ou N_2), on a :

- $\omega_0 \approx 10^{17} \text{ rad s}^{-1}$ qui correspond à de l'UV lointain ;
- ω dans le visible, soit $\omega \approx 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$;
- $\frac{1}{\tau} \approx 10^8 \text{ rad s}^{-1}$.

Donc $\omega^2 \ll \omega_0^2$ et $\omega/\tau \ll \omega_0^2$. On est dans le régime de la diffusion Rayleigh. On peut approximer (2.59)

$$\sigma(\omega) \approx \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}. \quad (2.60)$$

Couleur du ciel

L'équation (2.60) montre que dans le cadre de la diffusion Rayleigh, la section efficace $\sigma(\omega)$ est proportionnelle à ω^4 , c'est-à-dire $\sigma \propto \frac{1}{\lambda^4}$.

Or le bleu a pour longueur d'onde dans le vide $\lambda_B \approx 400$ nm, alors que le rouge $\lambda_R \approx 800$ nm. Par conséquent, le rapport des puissances moyennes rayonnées par unité de surface dans le bleu et dans le rouge vaut :

$$\frac{\sigma(\omega_B)}{\sigma(\omega_R)} = \left(\frac{\omega_B}{\omega_R}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_B}\right)^4 = 16. \quad (2.61)$$

Pour une même amplitude de champ incident, la lumière bleue est donc 16 fois plus diffusée que la lumière rouge ! Ceci permet notamment d'expliquer la couleur bleue du ciel : le spectre du Soleil –à peu près équilibré en rouge et bleu– est modifié suite au passage de la lumière dans l'atmosphère : les molécules d'air deviennent des dipôles oscillants qui diffusent la lumière et ré-émettent eux-mêmes des ondes lumineuses, mais avec une efficacité très différente selon la longueur d'onde.

Si on regarde le ciel ailleurs qu'à la position du Soleil, là où on devrait ne voir que la lumière des étoiles, on observe la diffusion de la lumière du Soleil par l'atmosphère. Comme la diffusion du bleu est 16 fois plus importante, le ciel nous apparaît bleu.

À l'inverse, si on regarde dans la direction du Soleil, on le voit jaune/orange, là où nous devrions le voir blanc. Ceci est dû à un appauvrissement en bleu puisque celui-ci est diffusé par l'atmosphère. Ce phénomène s'accroît si l'épaisseur traversée de l'atmosphère augmente, ce qui est le cas lors du lever ou du coucher du Soleil, qui nous apparaît alors rouge.

Polarisation par diffusion

La lumière du Soleil ou lumière « naturelle » est non polarisée.³ Son champ électrique vibre aléatoirement dans toutes les directions perpendiculaires à sa direction de propagation (figure 2.8).

Supposons que le champ se propage suivant (Oz) , les composantes du champ électrique dans les deux directions perpendiculaires (Ox) et (Oy) engendrent chacune des moments dipolaires induits oscillants $p_x \vec{e}_x$ et $p_y \vec{e}_y$. Ceux-ci vont réémettre, mais de façon anisotrope : le dipôle $p_y \vec{e}_y$ ne rayonne pas dans la direction \vec{e}_y et alors que le dipôle $p_x \vec{e}_x$ rayonne de façon maximale.

Pour un observateur situé suivant la direction \vec{e}_y , le champ électrique diffusé $\vec{E}_{\text{diffusé}}$ est uniquement dû au dipôle $p_x \vec{e}_x$ et est dirigé suivant $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x$: cette lumière diffusée est donc polarisée rectilignement selon \vec{e}_x .

Néanmoins, puisque l'observateur ne regarde pas dans une seule direction, mais dans un certain angle solide d'observation, la lumière n'est en réalité que partiellement polarisée. Lorsqu'on regarde le ciel à travers des lunettes polarisées (des verres auxquels on rajoute une surface polarisante), on peut constater une variation de la luminosité en fonction de la direction d'observation et de l'orientation du polariseur.

Remarque La diffusion Rayleigh est prépondérante pour des particules de faible dimension par rapport à la longueur d'onde (diamètre $d \ll \lambda/10$) qui est une hypothèse de travail du chapitre. Cependant, cette approximation n'est pas vérifiée pour des gouttelettes d'eau ou des aérosols. La diffusion Rayleigh est donc prépondérante dans les hautes couches de l'atmosphère, où la densité relative des aérosols est faible. L'interaction des aérosols avec la lumière ($d > 0,1 \mu\text{m}$) est décrite par la *diffusion de Mie*, régime de diffusion bien plus complexe. Dans le cas de la diffusion de Mie, on retiendra que :

- la lumière est essentiellement diffusée vers l'avant
- la diffusion de Mie présente une faible dépendance avec la longueur d'onde.⁴

3. Pour rappel, une lumière est non polarisée si en décomposant le champ \vec{E} dans les deux directions perpendiculaires à la propagation, les composantes présentent entre elles un déphasage aléatoire.

4. La couleur des nuages, du lait ou de la fumée de cigarette est un phénomène expliqué par la diffusion de Mie.

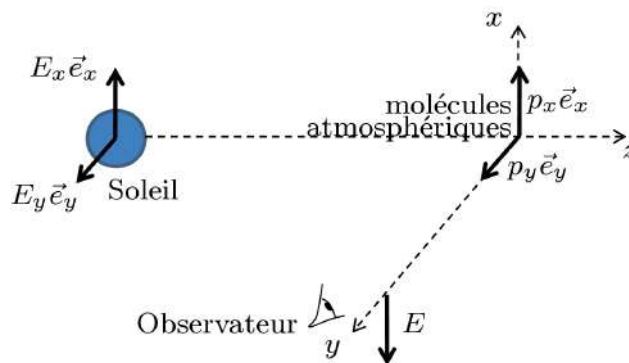


FIGURE 2.8 – Polarisation d’une lumière incidente non polarisée par diffusion

4.3 Cas des milieux denses (*)

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué la couleur du ciel grâce à la diffusion Rayleigh des molécules de l’atmosphère. Mais on peut aussi s’intéresser à d’autres milieux diélectriques : le verre, l’eau, etc. Que se passe-t-il dans cette situation ? Autrement dit, si on remplaçait l’atmosphère par une grosse plaque de plexiglas, verrait-on la même diffusion ?

Nous en avons l’habitude, dans les milieux matériels diélectriques homogènes, la lumière se propage en ligne droite. N’est-ce pas en complète contradiction avec le paragraphe précédent, assurant que la lumière est diffusée dans toutes les directions ? Pour lever ce paradoxe, il faut calculer la somme des champs électriques rayonnés par les atomes formant un milieu. Ce calcul est complexe, et sous plusieurs approximations (essentiellement un milieu dense mais pas trop), on obtient pour un champ incident se propageant selon \vec{k}_0 et polarisé rectilignement :

$$\vec{E}(\vec{k}) = 2 \vec{e}_d \int \delta n(\vec{r}) e^{-i\vec{r} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0)} dV \quad (2.62)$$

avec \vec{e}_d un vecteur indépendant des diffuseurs, donnant la direction de polarisation du champ \vec{E} . Le champ électrique sortant est relié à la transformée de Fourier de la variation spatiale d’indice $\delta n(\vec{r})$. On en déduit :

- Pour les milieux homogènes : $\delta n(\vec{r})$ est constant, donc l’intégrale est nulle pour tout \vec{k} sauf $\vec{k} = \vec{k}_0$, c’est-à-dire dans la direction d’émission. Il n’y a pas dans les milieux denses homogènes de diffusion sur les côtés. L’onde se propageant dans le milieu est la somme du champ électrique incident et du champ diffusé vers l’avant, et c’est cette interaction qui est responsable de la valeur de l’indice $n \neq 1$. Ouf !
- Pour les milieux cristallins, $\delta n(\vec{r})$ a une structure périodique qui va structurer la diffusion : on parle alors de diffraction. On aura le même type d’effet que pour les réseaux que nous verrons dans le chapitre d’optique. Il s’agit de la diffusion de Bragg.
- Et le cas de l’atmosphère ? Finalement, suivant ce raisonnement, l’atmosphère étant un milieu essentiellement homogène, pourquoi observe-t-on de la diffusion ? En regardant plus finement les processus de diffusion macroscopique, on peut montrer que les fluctuations thermodynamiques de densité jouent un rôle essentiel dans la diffusion. L’atmosphère étant un gaz, la densité de particules est nettement plus faible, et le nombre de particules dans un volume λ^3 fluctue ce qui est à l’origine du phénomène de diffusion.⁵

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître un modèle microscopique qui modélise la réponse électronique à un champ électromagnétique extérieur (le modèle de l’électron élastiquement lié).
- ✓ Identifier les différents régimes de diffusion selon la pulsation d’excitation ω .
- ✓ Expliquer la couleur du ciel et la polarisation de la lumière diffusée dans le cadre de la diffusion Rayleigh.

5. Pour plus de détails : [Raimond, Électromagnétisme et relativité](#)

Chapitre 3

Ondes électromagnétiques dans les milieux L.H.I.

Sommaire

1	Polarisation de la matière	60
1.1	Origine microscopique de la polarisation dans la matière	61
1.2	Description macroscopique de la polarisation	62
1.3	Vecteur déplacement électrique, susceptibilité électrique	64
1.4	Milieux L.H.I. électriques	66
1.5	Lien entre les approches microscopique et macroscopique	67
1.6	Retour sur le modèle de l'électron élastiquement lié	68
1.7	Utilisation des diélectriques	71
2	Aimantation de la matière	71
3	Équations de Maxwell dans les milieux matériels	72
3.1	Cas général	72
3.2	Cas des milieux L.H.I.	72
4	Propagation dans les milieux L.H.I. non chargés	73
4.1	Propagation dans un diélectrique	75
4.2	Propagation dans les conducteurs	78

Objectifs

Nous allons enfin nous intéresser à la matière à proprement parler. Nous commencerons par étudier la réponse d'un milieu à des champs électrique et magnétique. Un milieu peut

- être le siège d'un courant de charge sous l'effet d'un champ électrique ;
- se polariser sous l'action du champ électrique ;
- s'aimanter sous l'action du champ magnétique.

On commencera par distinguer deux types de milieux : les conducteurs et les isolants. Nous nous intéresserons ensuite à la description de la polarisation et l'aimantation de la matière, et nous nous focaliserons sur les matériaux linéaires homogènes et isotropes. Dans ces matériaux, la réponse à un champ électrique est comprise dans la définition d'une grandeur ϵ_r . Nous montrerons comment les équations de Maxwell sont modifiées dans un milieu matériel, ce qui introduira deux nouveaux champs \vec{D} et \vec{H} en complément des champs \vec{E} et \vec{B} . Enfin, nous étudierons la propagation d'une OPPH à travers un diélectrique L.H.I.

Dans un milieu globalement neutre, lors de l'établissement d'un champ électrique \vec{E} , des charges peuvent néanmoins apparaître. On sépare classiquement les charges en deux catégories : les *charges libres* qui sont libres de se déplacer dans le matériau, et les *charges de polarisation* qui sont liées aux atomes et molécules. On note ρ_ℓ (resp. ρ_P) la densité de charge libres (resp. de polarisation). La densité totale de charge est donc $\rho = \rho_\ell + \rho_P$.

Définition

On appelle **conducteur** un milieu qui possède des charges libres de se déplacer. À l'inverse, un milieu avec peu de charges libres est dit isolant, on l'appelle un **diélectrique**.^a

^a. « Diélectrique » vient du grec signifiant « à travers ». Le champ électromagnétique peut se propager à travers les diélectriques.

Un conducteur et un isolant ont respectivement une grande et une petite conductivité électrique σ , variant sur une très grande gamme d'ordres de grandeur : 10^9 S m^{-1} pour un bon conducteur (cuivre) à $10^{-20} \text{ S m}^{-1}$ pour un très bon isolant (polystyrène).

On pense souvent aux métaux pour les conducteurs, mais les électrolytes (milieux liquides ou solides qui contiennent des ions) et les plasmas (gaz dans lesquels des charges ont été ionisées) sont également des milieux conducteurs.

Remarque La définition précédente n'est pas tout à fait satisfaisante : on sépare les matériaux par rapport à l'ordre de grandeur de leur conductivité, mais cette distinction reste floue car on passe sous silence la différence de nature entre isolant et conducteur. Une définition rigoureuse demande des notions de bandes de conduction et de valence, qui sortent du contexte de ce cours.

Comment un milieu réagit-il à l'application d'un champ électrique extérieur ? Ce sont ses charges qui vont subir ce champ, et cela dépend de leur nature :

- **Les charges libres** vont se mettre en mouvement et créer un courant électrique. C'est l'essence de la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Nous reviendrons sur les conducteurs à la fin du chapitre, en particulier avec une modélisation microscopique de la loi d'Ohm.
- **Les charges liées** (ou de polarisation) vont également se déplacer mais en restant à proximité des atomes ou molécules qui les retiennent. L'objet de la suite est d'étudier cette réponse, et plus largement la réponse d'un milieu diélectrique à un champ.

Compétences à maîtriser

- ✓ Différencier les types de charges dans un milieu

1 Polarisation de la matière

La matière, bien que globalement neutre, est composée de particules chargées : des électrons, des protons, des ions, etc. Il est fréquent que celles-ci s'organisent de façon imposée ou spontanée sous forme de dipôles : par exemple, une molécule d'eau est une molécule possédant un moment dipolaire non-nul car les barycentres des charges positives (au milieu des deux H) et négatives (sur le O) ne sont pas superposés. On dit que ces molécules sont *polaires*.

Si des moments microscopiques existent fréquemment, il est plutôt rare de rencontrer un matériau possédant un moment dipolaire macroscopique. En effet, avoir un moment dipolaire macroscopique signifie stocker une grande quantité d'énergie électrique, et il existe très souvent des états de plus basse énergie pour le matériau. Dans le cas de l'eau, les moments microscopiques sont orientés aléatoirement, ce qui donne un moment total macroscopique nul. Ainsi, qu'il existe ou non des moments dipolaires microscopiques dans le milieu, la résultante macroscopique est le plus souvent nulle.¹

Cependant, la présence d'un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} va changer la donne : les charges étant liées, elles ne peuvent pas comme les charges libres se déplacer globalement et établir un courant électrique. Elles peuvent cependant se déplacer *localement*, les charges positives de façon opposée aux charges négatives. La matière va donc réagir à la présence du champ en séparant les charges selon leur signe, donc en créant un moment dipolaire

1. Les rares matériaux possédant un moment dipolaire spontané sont dits **ferroélectriques** et sont appelés **électrets**.

induit. On dit que le milieu se *polarise*. Nous nous intéressons d'abord à la justification microscopique d'un tel phénomène, pour encore les décrire de façon macroscopique.

1.1 Origine microscopique de la polarisation dans la matière

Il existe trois mécanismes microscopiques qui permettent l'apparition d'un moment dipolaire induit :

Origine des moments microscopiques

En présence d'un champ extérieur \vec{E}_{ext} , on observe trois phénomènes qui conduisent à l'apparition de dipôles microscopiques :

- **la polarisation électronique** : sous l'effet du champ et de la force de Lorentz, la déformation du nuage électronique dans un atome induit un déplacement des barycentres des charges dans l'atome.
- **la polarisation ionique (ou atomique)** : exemple dans un cristal ionique NaCl, les ions Na^+ et Cl^- vont se déplacer sous l'effet d'un champ, déformer le réseau, les barycentres des charges positives et négatives ne vont plus coïncider.
- **la polarisation d'orientation** : dans les milieux polaires, en l'absence de champ extérieur les dipôles sont orientés aléatoirement. En présence d'un champ, ils auront tendance à s'orienter selon la direction de celui-ci.

Ces mécanismes sont représentés schématiquement sur la figure 3.1.

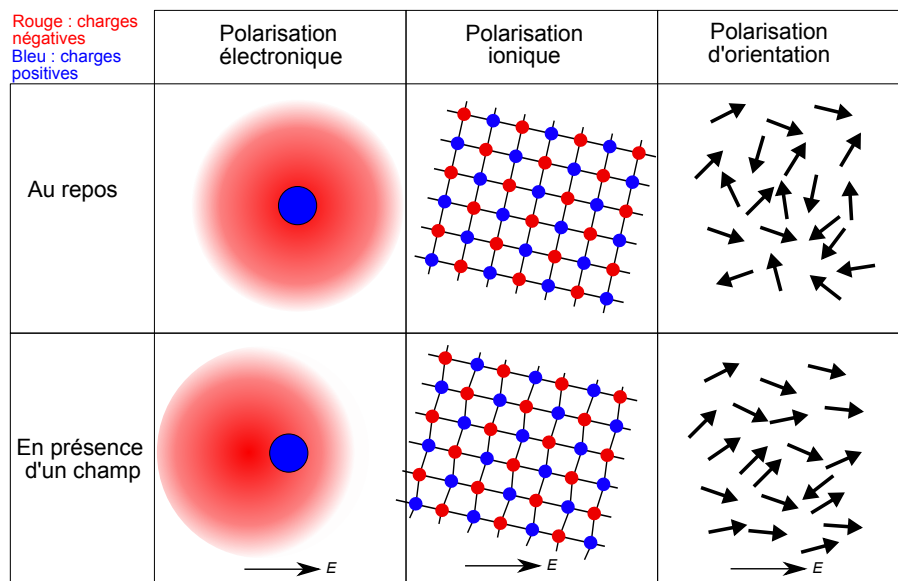


FIGURE 3.1 – Les trois origines microscopiques de l'apparition d'un moment dipolaire induit. Crédit : image tirée de [Wikipédia](#).

Quelle que soit l'origine microscopique de l'apparition de ces dipôles, on parle de *dipôles induits* :

Définition

Sous l'action d'un champ électrique \vec{E}_{ext} , il peut ainsi apparaître des **dipôles induits** \vec{p}_{ind} qu'on écrit

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{loc}} \quad (3.1)$$

où \vec{E}_{loc} est le champ local subit par les charges, et α est une constante appelée **polarisabilité** du milieu. On a introduit la constante ϵ_0 pour des questions de dimension. α est alors proportionnelle à un volume.

Avec les trois mécanismes de polarisation, on peut décomposer la polarisabilité

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_{\text{ori}}(T), \quad (3.2)$$

où la contribution d'orientation dépend de la température.

Pour les fréquences qui vont nous intéresser, c'est essentiellement la réponse électronique qui nous intéresse. Or cette contribution a déjà été modélisée au chapitre 2 avec le modèle de l'électron élastiquement lié ; nous y reviendrons au paragraphe 1.6.

Définition

Si le champ extérieur est bien \vec{E}_{ext} , rien n'assure qu'un dipôle *dans* la matière va ressentir ce champ. En réalité, les charges, atomes, molécules voisines vont aussi créer un champ électrique, et donc le moment subira la somme du champ extérieur et des champs créés par ses voisins. On appelle le champ ressenti le **champ local**. La détermination de ce champ est très délicate en général, nous reviendrons sur ce point au paragraphe 1.5.

Remarque Le champ électrique imposé peut être un champ statique (continu, ou à une fréquence $< 10^{13}$ Hz) comme un champ oscillant (hertzien, infrarouge, visible, UV). La définition de la polarisabilité reste correcte à fréquence variable, cependant la réponse des matériaux dépend de la pulsation d'excitation : $\alpha(\omega)$ comme nous l'avons modélisé au chapitre précédent dans le cas de la polarisabilité électronique.

1.2 Description macroscopique de la polarisation

La partie précédente a permis de comprendre l'origine de dipôles induits microscopiques. Ici, nous considérons le milieu à une échelle plus grande, et nous allons caractériser sa réponse sans chercher à regarder les mécanismes microscopiques sous-jacents. Dans la sous-partie 1.5, nous discuterons comment associer ces deux approches micro- et mésoscopiques.

On considère un matériau globalement neutre, donc pour lequel la notion de moment dipolaire est bien définie.

1.2.1 Vecteur polarisation

L'existence de moments microscopiques va produire une réponse macroscopique. Afin de quantifier cette réponse, on définit une quantité intensive à l'échelle mésoscopique :

Définition

Soit un volume dV mésoscopique autour du point M . On note $d\vec{P}$ la résultante des moments dipolaires microscopiques (induits ou non) dans le volume dV . On définit le **vecteur polarisation** $\vec{P}(M)$ comme la densité volumique de moment dipolaire en ce point :

$$\vec{P}(M) = \frac{d\vec{P}}{dV}. \quad (3.3)$$

La norme de \vec{P} s'exprime en C m^{-2} .

1.2.2 Courant de polarisation

Lorsqu'un champ électrique est imposé, on passe d'une situation sans polarisation à une situation avec $\vec{P} \neq 0$. On a donc un régime transitoire, pendant lequel des charges se sont déplacées pour créer les moments dipolaires induits. Donc, il existe un courant transitoire de charges lié à la variation temporelle du vecteur polarisation.

En effet, écrivons dans un volume mésoscopique dV les dipôles $\vec{p}_i = q_i \vec{r}_i$. S'il y a un mouvement de charges, il y a un courant associé :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{dV} \sum_{i \in dV} q_i \vec{r}_i = \frac{1}{dV} \sum_{i \in dV} q_i \vec{v}_i = \vec{j}_P. \quad (3.4)$$

Définition

Lors de l'établissement d'une polarisation \vec{P} , des charges se réorganisent dans le milieu matériel et créent un ***courant de polarisation***, d'expression

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Ces courants ne sont pas directement observables puisque par définition ils restent confinés dans le matériau. On les observe indirectement en regardant les effets produits, comme la variation temporelle de la polarisation, ou l'apparition d'une charge surfacique dans le milieu.

1.2.3 Densité volumique et surfacique de charges liées

Le vecteur polarisation permet de caractériser complètement l'état électrique d'un milieu polarisé. Cependant, un dipôle étant par essence deux charges, il est toujours possible de décrire les observations physiques sans faire intervenir de vecteur polarisation, mais en introduisant des densités volumique et surfacique de charges. L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les liens entre ces deux descriptions.

Comme nous avons défini un courant \vec{j}_P , la conservation de la charge impose l'existence d'une densité volumique de charge ρ_P telle que

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_P = 0. \quad (3.6)$$

En remplaçant \vec{j}_P par (3.5), on trouve que $\rho_P = -\text{div } \vec{P}$.

En plus de charges réparties en volume, des charges de polarisation surfaciques peuvent apparaître, comme dans le cas où l'on insère un milieu diélectrique entre les armatures d'un condensateur plan. Sur cet exemple (Fig. 3.2), il n'existe pas de densité volumique de charges (de façon équivalente $\text{div } \vec{P} = 0$), ce qui se comprend en associant des dipôles élémentaires : les charges négatives des uns vont compenser les charges positives des autres. En revanche, à la surface du diélectrique, il subsiste des charges non compensées de densité surfacique σ_P .

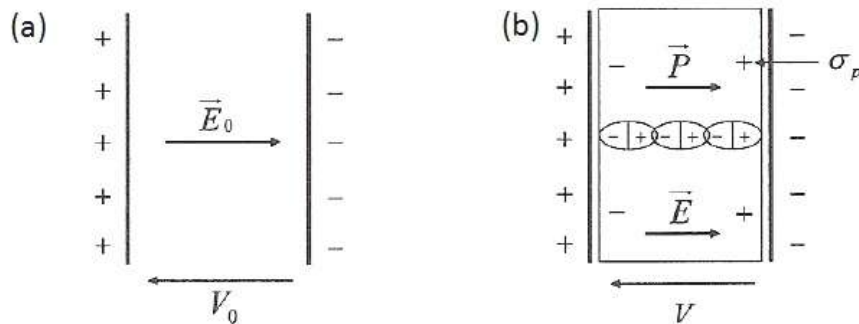


FIGURE 3.2 – (a) condensateur à vide (b) diélectrique placé entre les armatures du condensateur

Revenons au cas d'un diélectrique en général : la charge totale portée par le diélectrique doit être nulle. Par conséquent, on doit avoir :

$$\iiint_V \rho_P dV + \iint_S \sigma_P dS = 0 \quad (3.7)$$

où S est la surface qui entoure le volume V du diélectrique. Soit, avec \vec{n} le vecteur unitaire sortant normal localement à dS :

$$0 = \iiint_V -\operatorname{div} \vec{P} dV + \iint_S \sigma_P dS = \iint_S (-\vec{P} \cdot \vec{n} + \sigma_P) dS. \quad (3.8)$$

On en déduit que $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Description de l'état électrique d'un diélectrique

L'état d'un milieu polarisé peut être décrit par deux formalismes différents :

- en introduisant un vecteur polarisation \vec{P} qui quantifie la densité de dipôles électriques par unité de volume qui apparaissent en imposant un champ extérieur ;
- en introduisant une densité volumique ρ_P et surfacique σ_P de charges induites par la présence du champ extérieur.

Ces deux formalismes sont équivalents. Le lien entre ces deux formulations est donné par les deux formules :

$$\boxed{\rho_P(M) = -\operatorname{div} \vec{P} \quad \text{et} \quad \sigma_P(M) = \vec{P} \cdot \vec{n}}. \quad (3.9)$$

Remarque Pour que le vecteur polarisation soit bien défini, il faut que le matériau soit globalement neutre. Si ce n'est pas le cas, la définition même de \vec{P} n'a plus de sens car elle dépendrait du choix de l'origine du repère. Dans le cas des cristaux, la bonne définition de \vec{P} est nettement plus subtile à cause de la périodicité du système, cela a donné des nouvelles formulations de la théorie de la polarisation. ²

1.3 Vecteur déplacement électrique, susceptibilité électrique

Revenons aux équations de Maxwell. La densité de charge ρ a été décomposée en deux parties très différentes : une qui contribue au courant électrique (ρ_ℓ) et une autre qui n'est pas aisément accessible puisqu'elle reste à l'intérieur du matériau (ρ_P). Pour cette raison, on peut vouloir « faire disparaître » ces charges de polarisation dans les équations. Prenons l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ell + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_\ell}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (3.10)$$

ce qu'on peut réécrire

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_\ell. \quad (3.11)$$

Pour l'équation de Maxwell-Gauss, tout se passe comme si dans les milieux, le champ électrique \vec{E} était remplacé par le champ $\vec{E} + \vec{P}/\varepsilon_0$.

Définition

Dans un milieu polarisé, on définit le **vecteur déplacement électrique**^a \vec{D} comme

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}. \quad (3.12)$$

2. Voir les articles de Resta et Vanderbilt à ce sujet (par exemple [celui-ci](#))

Cette définition permet de réécrire l'équation de Maxwell-Gauss uniquement en terme des charges libres :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_\ell}. \quad (3.13)$$

a. L'appellation de ce champ n'est pas consensuelle. Vous trouverez aussi « excitation électrique » ou « densité de champ électrique ».

On a ainsi une équation de Maxwell où n'apparaissent plus les charges de polarisation, seules les charges de conduction interviennent ³, comme pour les équations de Maxwell dans le vide. Le prix à payer est l'introduction d'un nouveau champ \vec{D} dans les équations de Maxwell, qui reste à déterminer.

Là où nous avons avant deux champs (\vec{E} et \vec{B}), nous en avons maintenant trois (avec \vec{D} ou de façon équivalente \vec{P}). Afin d'espérer résoudre le problème, il faut donc rajouter une équation qui relie \vec{P} et \vec{E} aux équations de Maxwell. Cette équation, qui dépend de la réponse du matériau, est appelée *équation d'état* du milieu. ⁴

Définition

On écrit de façon générale la relation entre \vec{P} et \vec{E} sous la forme

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad (3.14)$$

où $[\chi_e]$ est la matrice (ou tenseur) de *susceptibilité électrique* du milieu. Elle est sans dimension. Dans le cas général, elle dépend du champ électrique, de la position et du temps.

Dans le cas général, une telle équation est très délicate à déterminer car il s'agit d'un problème auto-cohérent : si un champ extérieur \vec{E}_{ext} est imposé, cela va induire une polarisation \vec{P} , qui va modifier le champ \vec{E} que subissent les particules à l'intérieur du milieu, et donc rétroactivement changer \vec{P} qui va changer \vec{E} , etc.

Rappels mathématiques

Un tenseur est une application multilinéaire, au sens mathématique. Très concrètement, ici il s'agit d'une fonction linéaire T qui agit sur l'espace des vecteurs : elle prend un vecteur \vec{V} en argument et le transforme en un autre vecteur $\vec{T}(\vec{V})$. Avec un choix de base de l'espace (la base canonique par exemple), on peut représenter ces tenseurs par des matrices (ici de taille 3×3 , puisqu'on est dans l'espace à 3 dimensions). En changeant de base, la matrice représentant le tenseur change.

On peut néanmoins réécrire le vecteur diélectrique avec cette expression :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + [\chi_e]) \vec{E}. \quad (3.15)$$

Définition

On appelle $[\varepsilon_r] = 1 + [\chi_e]$ le tenseur de *permittivité relative* du milieu L.H.I. considéré, et $[\varepsilon] = \varepsilon_0 [\varepsilon_r]$ le tenseur de *permittivité* (absolue).

On a :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E} = [\varepsilon] \vec{E}}. \quad (3.16)$$

De façon générale, $[\varepsilon]$ est une matrice, donc \vec{D} et \vec{E} peuvent avoir une orientation différente. Si \vec{E} est un champ oscillant à la pulsation ω , la permittivité relative $[\varepsilon_r(\omega)]$ est en général complexe, fonction de ω . La

3. C'est-à-dire les charges extérieures, contrôlées par exemple par l'expérimentateur, à travers la différence de potentiel appliquée sur le matériau.

4. Cette appellation est similaire à l'équation des gaz parfaits ou l'équation de Van der Waals qui ont le même objectif : donner une relation entre les grandeurs du système, qui décrit la réponse de celui-ci.

valeur à basse fréquence de la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega = 0)$ est appelée **constante diélectrique**.

En pratique, les milieux possèdent souvent des propriétés qui vont simplifier l'étude.

1.4 Milieux L.H.I. électriques

Définition

Les milieux usuels possèdent souvent certaines propriétés très générales. Un milieu peut être

- **linéaire** (L) : la relation entre \vec{P} et \vec{E} est linéaire, alors la susceptibilité ne dépend pas de \vec{E} (ou les termes supérieurs sont négligeables dans la gamme de champs électriques considérés).^a
- **isotrope** (I) : \vec{P} est toujours dans la même direction de \vec{E} : la matrice $[\chi_e]$ est alors diagonale et tous ses coefficients sont identiques à une valeur $\chi_e(M)$.^b
- **homogène** (H) : le milieu est le même en tout point de l'espace, alors $\chi_e(M) = \chi_e$ est une simple constante positive.^c

On qualifie les matériaux vérifiant toutes ces propriétés de **milieux L.H.I. électriques**.

a. à fort champ électrique, des termes d'ordre \vec{E}^2 , \vec{E}^3 peuvent intervenir. Ils donnent naissance à des effets non-linéaires connus : effet Kerr, effet Pockels, doublement de fréquence, etc. régulièrement utilisés en recherche. Les lasers bleus commerciaux sont souvent des lasers rouges avec doublement de fréquence.

b. Cette propriété élimine les matériaux biréfringents du cadre d'étude qui seront considérés dans le chapitre 7. Les liquides, les gaz, les cristaux sur un réseau très symétrique sont isotropes. En revanche, le quartz fait d'oxyde de silicium, le ruban adhésif fait de polymères sont anisotropes.

c. On exclut de l'étude les milieux avec des gradients internes (de température, de potentiel chimique, etc.) et on exclut donc entre autres l'étude des mirages.

On ramène donc l'étude d'un tenseur $[\chi_e]$ (ou $[\varepsilon_r]$) fonction de l'espace, du temps et du champ électrique à un simple scalaire χ_e (ou ε_r) indépendant du champ ! Deux cas sont à distinguer :

- Si le champ \vec{E} est statique, alors χ_e et ε_r sont des constantes. En théorie, le coefficient χ_e peut être positif ou négatif, cependant, on ne connaît expérimentalement que des éléments $\chi_e \geq 0$. On considérera donc que la susceptibilité électrique statique est toujours positive. Ainsi, on a toujours $\varepsilon_r \geq 1$ car $\chi_e \geq 0$, avec égalité pour le vide.
- Si le champ \vec{E} est oscillant à la pulsation ω , alors χ_e et ε_r sont des fonctions de la pulsation, à valeurs complexes.

Dans ces milieux, les champs \vec{D} et \vec{E} sont simplement colinéaires :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (3.17)$$

La réponse électrique d'un milieu L.H.I. électrique est donc complètement décrite par la donnée de ε_r (potentiellement une fonction complexe de ω pour un champ variable) !

Dans des milieux peu polarisables (comme l'air), on a $\varepsilon_r \simeq 1$. Le tableau 3.1 donne des exemples de valeurs de ε_r à différentes fréquences.

Fréquence (Hz)	100	10^6	10^{10}
vide	1	1	1
eau	81	78,2	34
Verre	5	4,84	4,82
Caoutchouc butyle	2,43	2,40	2,38
Titanate de baryum	1250	1140	100

TABLE 3.1 – Permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$ pour quelques milieux à différentes fréquences

On se concentre à partir de maintenant sur les milieux L.H.I. électriques. On reviendra sur les milieux anisotropes au dernier chapitre.

1.5 Lien entre les approches microscopique et macroscopique

Nous avons introduit au paragraphe 1.1 l'origine des dipôles induits par un champ à l'échelle microscopique, ce qui définit la polarisabilité d'une particule. D'un autre côté, nous avons posé phénoménologiquement la susceptibilité électrique comme le coefficient de proportionnalité entre le vecteur polarisation induit et le champ exciteur. Il doit bien sûr exister un lien entre α et χ_e .

Si le milieu d'intérêt est composé de dipôles \vec{p} identiques, alors le vecteur polarisation du milieu s'écrit $\vec{P} = N\vec{p}$ où N est la densité de particules. Dans le cas de moments induits, on a $\vec{p} = \varepsilon_0\alpha\vec{E}_{\text{loc}}$ où \vec{E}_{loc} est le champ localement ressenti par la particule.

1.5.1 Cas des milieux très dilués

Si les particules sont très éloignées les unes des autres et faiblement polarisables, elles n'interagissent pas entre elles. Donc le champ local ressenti par la particule est simplement le champ extérieur \vec{E}_{ext} , aussi égal au champ dans le matériau \vec{E} . On a ainsi :

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0N\alpha\vec{E} \quad (3.18)$$

et donc

$$\boxed{\chi_e = N\alpha \quad (\text{pour les milieux dilués})}. \quad (3.19)$$

1.5.2 Cas des milieux denses (★)

Champs local, micro et macroscopique Pour calculer le champ \vec{E}_{loc} dans un milieu dense, nous allons prendre l'approche de Lorentz. Commençons par revenir sur une distinction entre différents champs électriques :

- Le champ microscopique $\vec{e}(\vec{r})$: c'est le champ régnant réellement à l'échelle microscopique, y compris dans les particules. Celui-ci varie extrêmement vite (à l'échelle de l'atome typiquement), et a des valeurs extrêmement intenses. Il est très inhomogène et diverge sur les particules. Pour ces raisons, même si c'est le *vrai* champ régnant dans un milieu, on choisit de le moyenner à l'échelle mésoscopique.
- Le champ macroscopique $\vec{E}(\vec{r})$ est la moyenne mésoscopique du champ \vec{e} . Il varie lentement à l'échelle macroscopique.
- Le champ local est le champ ressenti par une particule à la position \vec{r} . Donc c'est le champ $\vec{E}(\vec{r})$ dans le milieu auquel on a retranché la contribution de la particule en question.

Calcul de Lorentz On considère pour simplifier que les dipôles sont répartis sur un réseau cubique de côté a . On sépare l'espace en deux zones : (1) une sphère centrée sur la particule où on veut calculer le champ local, de rayon $R \gg a$; (2) le reste de l'espace, donc le milieu dont on a ôté une cavité sphérique de rayon R . Le champ local est donc la somme des champs créés par ces deux contributions : \vec{E}_1 et \vec{E}_2 respectivement.

Nous aurons besoin du résultat suivant que nous admettrons : une sphère uniformément polarisée avec un vecteur polarisation \vec{P} a en son sein un champ $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

- Calcul de \vec{E}_1 : il s'agit du champ créé par tous les dipôles proches. Dans le cas général, ce champ est difficile à déterminer, mais dans le cas d'un système cubique donc à haute symétrie, on peut montrer qu'il est exactement nul pour des raisons de symétrie.
- Calcul de \vec{E}_2 : il s'agit cette fois du champ créé au centre de la cavité de rayon R . Comme tous les dipôles sont lointains, on peut utiliser cette fois les grandeurs moyennées. Le champ macroscopique régnant dans la cavité est \vec{E} , le champ macroscopique « normal » du milieu, auquel on a retranché la contribution de la sphère de rayon R , dont nous avons admis qu'il vaut $-\vec{P}/3\varepsilon_0$.

Ainsi, le champ local subit par la particule vaut :

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} + \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (3.20)$$

Finalement

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (3.21)$$

Remarque Ce résultat remarquable vient du fait que le champ \vec{E}_1 a pu facilement être éliminé pour des raisons de symétrie. Ce résultat reste vrai dans un solide amorphe ou dans un liquide ! En revanche, dans un réseau non cubique, ce champ est non nul et doit être calculé.

Formule de Clausius-Mossoti Grâce à l'expression du champ local, on peut en déduire l'expression de la susceptibilité :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 N \alpha \vec{E}_{\text{loc}} = \varepsilon_0 N \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \right) \quad (3.22)$$

dont on déduit en isolant \vec{P}

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{\frac{3}{N\alpha}(\chi_e - N\alpha)}_{=\chi_e} \vec{E} \quad (3.23)$$

où l'on retrouve la définition de χ_e puisque c'est le coefficient de proportionnalité entre \vec{P} et \vec{E} . En isolant à nouveau χ_e , on obtient finalement

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} \quad (\text{pour les milieux cubiques ou amorphes}). \quad (3.24)$$

Cette expression montre que la contribution des particules internes vient renforcer le champ, puisque maintenant $\chi_e > N\alpha$. On retrouve de plus le résultat des milieux dilués si $N\alpha \ll 1$.

Si α devient suffisamment grande, alors le dénominateur peut diverger. On parle de *catastrophe de polarisation*.⁵

Par la suite, nous nous placerons toujours dans le cas d'un milieu dilué où $\chi_e = N\alpha$.

1.6 Retour sur le modèle de l'électron élastiquement lié

Dans le chapitre 2, nous avons introduit un modèle permettant de décrire de façon phénoménologique la réponse d'un électron à un champ électrique. C'est exactement ce qu'il nous faut pour modéliser la polarisabilité électronique ! L'électron subissait trois forces :

1. la force de Lorentz électrique ($q\vec{E}$);
2. une force de rappel élastique modélisant sa liaison à l'atome ($-m\omega_0^2\vec{r}$);
3. une force de frottements modélisant la perte d'énergie par rayonnement ($-\frac{m}{\tau}\vec{v}$).

Dont nous avons déduit en notation complexe la position \vec{r} et donc la vitesse $\vec{v} = -i\omega\vec{r}$ du porteur de charge de charge q :

$$\vec{r} = \frac{q}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{q}{m} \frac{-i\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}. \quad (3.25)$$

On en déduit le moment dipolaire

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}. \quad (3.26)$$

On peut le mettre sous la forme $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}$ pour mettre en évidence la polarisabilité électronique. Celle-ci est une grandeur complexe

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (3.27)$$

5. Pour plus de détails sur cet aspect, et sur la physique des diélectriques de façon générale, vous pouvez aller feuilleter l'ouvrage PEUZIN & GIGNOUX, *Physique des diélectriques*, éditions EDP Sciences.

On peut maintenant relier la réponse microscopique d'un électron à la réponse macroscopique du milieu. Pour un milieu dilué avec une densité volumique N d'électrons :

$$\underline{\chi}_e = N\underline{\alpha} = N \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (3.28)$$

Ainsi, la permittivité relative s'écrit

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}}} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}. \quad (3.29)$$

La pulsation ω_p est appelée **pulsation plasma**.⁶

Sur la figure 3.3 sont tracées les parties réelle et imaginaire de ε_r . On remarque que :

- la partie imaginaire ε_r'' n'est non-nulle qu'à proximité de la pulsation propre ω_0 . En effet, l'électron joue le rôle d'un oscillateur, pour lequel on peut observer une résonance, il récupère l'énergie essentiellement près de ω_0 ⁷.
- la partie réelle ε_r' est croissante partout sauf à proximité de ω_0 . On dit qu'il s'agit d'une dispersion normale. À proximité de ω_0 , ε_r' décroît, la dispersion est dite anormale. On remarque de plus que la pente est très importante à la résonance, donc une très forte dispersion.

On reviendra dans la suite du chapitre sur l'interprétation des parties réelle et imaginaire de la permittivité relative.

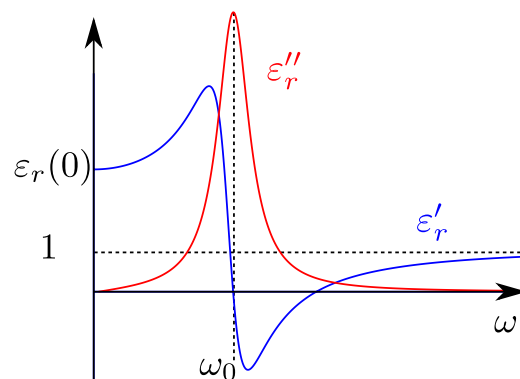


FIGURE 3.3 – Parties réelle et imaginaire de la permittivité relative liée à l'effet de polarisabilité électronique.

Ordres de grandeur On peut relier les pulsations propres ω_0 proches du visible des isolants solides aux énergies de transition entre bandes de valence et de conduction. Le tableau 3.2 en donne quelques exemples. On est dans le proche infrarouge pour le verre.

Limites du modèle de l'électron élastiquement lié Le modèle microscopique que nous avons utilisé est un modèle purement classique. Ce modèle a le bon goût de donner une très bonne vision qualitative du phénomène de polarisabilité électronique, cependant, pour une bonne interprétation des paramètres du problème (ω_0 , τ) et des résultats quantitatifs, il faut faire intervenir la mécanique quantique.

- En mécanique quantique, l'électron est au repos dans un état fondamental de l'atome. Là où dans le modèle ci-dessus il n'avait qu'une seule pulsation propre, il peut être excité pour tous les photons dont

6. Cette appellation se justifie lorsqu'on étudie les oscillations libres d'un plasma. En effet, on peut montrer que celui-ci oscille naturellement à une fréquence propre qui est ω_p .

7. La fréquence de résonance n'est en fait pas *strictement* ω_0 comme pour une résonance en amplitude, mais on l'y assimilera pour des grands facteurs de qualité.

Diélectrique	ω_0 (rad s ⁻¹)
Diamant	$8,2 \times 10^{15}$
Verre	$1,5 \times 10^{16}$

TABLE 3.2 – Valeurs typiques des pulsations propres pour des isolants

l'énergie est proche des $E_n - E_{n'}$, les différences d'énergie entre états (avec E_n l'énergie de l'état n). Ainsi, on devrait avoir plusieurs résonances et non une seule, ce que l'on observe sur la figure 3.4 en regardant les transitions dans l'ultraviolet. De plus, celles-ci sont pondérées par des coefficients dits *forces d'oscillateur*. La généralisation du modèle de l'électron élastiquement lié est la formule de Sellmeier.

- Il semblerait que si la résonance est assez aiguë, ϵ_r'' puisse être aussi grand qu'on le souhaite. Cela n'est pas vrai en mécanique quantique, on ne peut pas exciter tous les électrons de l'état fondamental en même temps : il y a un phénomène de saturation qui intervient.
- Le paramètre τ introduit dans le modèle reste très mystérieux, seule une réinterprétation quantique permet de comprendre son origine.

Prise en compte des autres polarisabilités De plus n'oublions pas que nous n'avons modélisé microscopiquement que la polarisabilité électronique. Il faudrait faire de même pour les autres effets de polarisabilité. Il est possible de modéliser les autres sources de dispersion : les polarisabilités orientationnelle et ionique. La figure 3.4 présente le spectre typique d'un milieu. La polarisation d'orientation (non indiquée sur le schéma) se déroule à basses fréquences (domaine radio), la polarisation ionique plutôt dans l'infrarouge (gamme des fréquences de rotation des molécules)⁸, et la polarisation électronique dans l'ultraviolet ou le visible (gamme des transitions électroniques). La partie droite de la figure 3.4 montre des mesures de l'indice optique n (dont on admettra pour l'instant que les parties réelle et imaginaire ressemblent à celles de ϵ_r) sur de la silice, matériau qui compose les verres. On remarque effectivement ce comportement avec cette suite de résonances dans différentes gammes de fréquences.

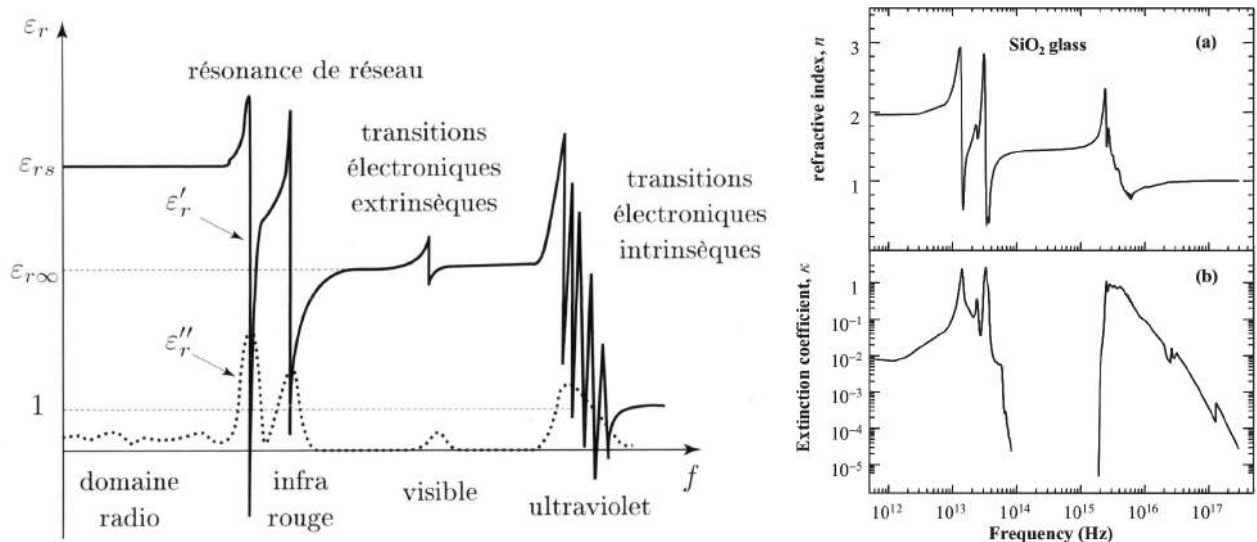


FIGURE 3.4 – À gauche : spectre théorique typique pour un milieu diélectrique réel, des fréquences radioélectriques aux fréquences optiques. Image tirée de Peuzin & Gignoux, *Physique des diélectriques*. À droite : Parties réelle et imaginaire de l'indice optique (notations de la figure $\underline{n} = n + i\kappa$) reliées à celles de la permittivité. Ces graphes présentent des données expérimentales dans la silice (tiré de Fox, *Optical Properties of solids*).

8. Les pulsations propres de la polarisation ionique sont typiquement de l'ordre de 10^{13} rad s⁻¹, donc dans la gamme de l'infra-rouge lointain.

1.7 Utilisation des diélectriques

Les diélectriques ont de nombreuses applications, autant au laboratoire que dans la vie quotidienne.

- On utilise des diélectriques entre les armatures de *condensateurs* pour augmenter leur capacité, de quelques pF au mF. On utilise pour cela des diélectriques à très fort ϵ_r .
- Les circuits intégrés utilisent les diélectriques comme *isolants* électriques, ils constituent également des condensateurs dans des transistors.
- Les *mémoires DRAM* utilisent des fines couches de diélectriques à très forte permittivité.
- les diélectriques sont indispensables à la fabrication des *fibres optiques*. Celles-ci sont utilisées à une longueur d'onde infra-rouge $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ telle qu'on tombe à la fois dans une région de faible dispersion et de faible absorption pour la silice. Le choix d'une grande longueur d'onde permet de plus de minimiser les pertes par diffusion Rayleigh (comme on l'a vu, la puissance diffusée est proportionnelle à λ^{-4}). Dans les fibres, on utilise des diélectriques d'indices très proches pour former cœur et gaine. L'indice de la gaine étant plus élevé que celui du cœur on a un effet de réflexion totale. Ces fibres optiques ont une atténuation classique de $0,2 \text{ dB km}^{-1}$ ⁹, très en-deçà des pertes dans une ligne de cuivre supérieures à 10 dB km^{-1} .
- Dans un cas particulier les pertes sont souhaitables, lorsqu'on souhaite transférer de l'énergie : le *chauffage par micro-ondes* opère à une fréquence $f = 2,45 \text{ GHz}$ où l'eau absorbe de façon importante le rayonnement (mais pas trop, sinon on ne pourrait pas chauffer un aliment à cœur !)

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les origines microscopiques de la polarisation
- ✓ Savoir passer de la modélisation microscopique à la description macroscopique dans le cas de particules indépendantes
- ✓ Connaître les définitions des grandeurs associées à la polarisation (\vec{P} , \vec{D} , ϵ_r) et l'équation d'état d'un milieu L.H.I. électrique.

2 Aimantation de la matière

Tout comme certains matériaux réagissent à la présence d'un champ électrique, des matériaux peuvent répondre à la présence d'un champ magnétique. Dans ce cas, ils s'aimantent, c'est-à-dire qu'apparaît un moment magnétique macroscopique. Certains peuvent également posséder une aimantation permanente en l'absence de champ magnétique : c'est le cas des aimants.

L'étude détaillée des matériaux magnétiques sort du programme de ce cours, en particulier parce que les effets magnétiques ont un intérêt à basses fréquences, mais peu aux fréquences optiques. Nous retiendrons simplement que :

- les matériaux peuvent présenter une aimantation spontanée ou induite par un champ magnétique extérieur notée \vec{M} ;
- on peut définir un champ jouant le rôle de \vec{D} pour les milieux magnétiques $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$;
- on peut parler de milieux L.H.I. magnétiques, et définir ainsi une susceptibilité magnétique χ_m et une perméabilité relative μ_r . Alors, $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$.
- dans les milieux L.H.I. magnétiques, tout se déroule comme si μ_0 était remplacé par $\mu_0\mu_r$.

Dans la suite on prendra $\mu_r = 1$. Néanmoins il est possible de généraliser les équations de Maxwell aux milieux magnétiques (L.H.I.) en remplaçant μ_0 par $\mu_0\mu_r$.

9. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fibre_optique

3 Équations de Maxwell dans les milieux matériels

3.1 Cas général

Nous avons introduit les équations de Maxwell dans le premier chapitre comme un postulat fondamental de l'électromagnétisme. Pour l'instant, rien n'a permis de mettre en doute la véracité de ces équations, ses prédictions étant en permanence testées dans les mondes infiniment petit et grand.

Dans un milieu matériel néanmoins, il est utile de réécrire ces équations sous une forme plus pratique :

- Les deux équations de structure (Maxwell-Thomson et Maxwell Faraday) restent inchangées ;
- dans les équations aux sources, on fait apparaître explicitement les densités de charges et de courants supplémentaires dues à la réponse du milieu.

Pour la densité de charges, on a les contributions des charges liées et libres. On a déjà reformulé l'équation de Maxwell-Gauss (voir équation (3.13)). Pour les courants, on a les densités des charges libres ainsi qu' une contribution venant de la polarisation en régime variable. On peut donc réécrire l'équation de Maxwell-Ampère

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0(\vec{j}_\ell + \vec{j}_P) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0\vec{j}_\ell + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0\vec{j}_\ell + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Finalement, on peut réécrire les quatre équations de Maxwell :

Équations de Maxwell dans les milieux matériels

Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_\ell$
Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\vec{j}_\ell + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Thomson	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

En ne faisant intervenir dans les sources que les sources extérieures de charges libres ρ_ℓ et \vec{j}_ℓ .

Si les deux équations de structure restent inchangées, les équations liées aux sources font maintenant intervenir les champs \vec{H} et \vec{D} . Afin de résoudre ces équations, il faut rajouter aux équations de Maxwell les équations d'état électrique et magnétique du milieu.

3.2 Cas des milieux L.H.I.

On se place dans le cas de milieux L.H.I. électriques où $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. On a alors :

Les équations de Maxwell se réécrivent en ne faisant apparaître que les champs \vec{E} et \vec{B} , et la permittivité du milieu :

Équations de Maxwell dans les milieux L.H.I.

Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_\ell}{\varepsilon}$
Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_\ell + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Thomson	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Les équations de Maxwell dans les milieux L.H.I. ont donc exactement la même forme que celles dans le vide, en substituant simplement ε_0 par ε !

Grandeurs énergétiques dans les milieux L.H.I.

Le traitement des aspects énergétiques dans les milieux est très subtil, en particulier l'approche locale n'est plus tout à fait justifiée. On admettra que les grandeurs énergétiques s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$u_{em} = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (3.30)$$

On rappelle que la puissance volumique instantanée transférée aux charges du milieu vaut

$$\mathcal{P} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \vec{j}_\ell + \vec{j}_P. \quad (3.31)$$

Conclusion sur la propagation dans les milieux L.H.I.

On retiendra donc que la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux L.H.I. électrique est identique à celle de la propagation dans le vide, à condition de remplacer $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$.

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir exprimer les équations de Maxwell dans trois situations :
 1. dans le vide (ou en l'absence de milieux qui réagissent aux champs), c'est-à-dire l'expression vue dans le chapitre 1.
 2. dans les milieux matériels généraux en fonction de \vec{E} , \vec{D} et \vec{B} (encadré « Équations de Maxwell dans les milieux matériels »)
 3. dans les milieux matériels L.H.I. en fonction de \vec{E} , ε et \vec{B} (encadré « Équations de Maxwell dans les milieux L.H.I. »)
- ✓ Démontrer l'expression des équations de Maxwell dans les milieux matériels généraux et L.H.I.

4 Propagation dans les milieux L.H.I. non chargés

On s'intéresse au cas de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel. Pour cette première approche, on s'intéressera qu'à des matériaux L.H.I. électriques et **non chargés** en volume donc tels que $\rho_\ell = 0$.

On suppose que le milieu vérifie la **loi d'Ohm** $\vec{j}_\ell = \sigma \vec{E}$. Nous reviendrons plus en détail sur la loi d'Ohm dans la partie sur la propagation dans les conducteurs.

Équation d'onde

À partir des équations de Maxwell dans les milieux L.H.I. on peut déduire une équation de propagation du champ électrique. En calculant $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E}$ nous avons d'une part :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j}_\ell + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.32)$$

et d'autre part avec l'analyse vectorielle :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}. \quad (3.33)$$

En l'absence de charge volumique, la divergence du champ électrique est nulle, et en égalisant les deux lignes précédentes, et en remplaçant $c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$:

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (3.34)$$

Cette équation de propagation ressemble à l'équation de propagation dans le vide, mais avec deux différences notables : (1) la célérité c doit être remplacée par $c/\sqrt{\varepsilon_r}$. (2) le terme de droite est non-nul à cause de la conductivité du milieu.

Relation de dispersion

À partir de l'équation de propagation (3.34), il est possible d'en déduire directement la relation de dispersion. Le schéma 3.5 synthétise les deux façons d'obtenir la relation de dispersion. Ci-dessous, nous choisissons de repartir des équations de Maxwell pour les OPPH pour retrouver cette relation.

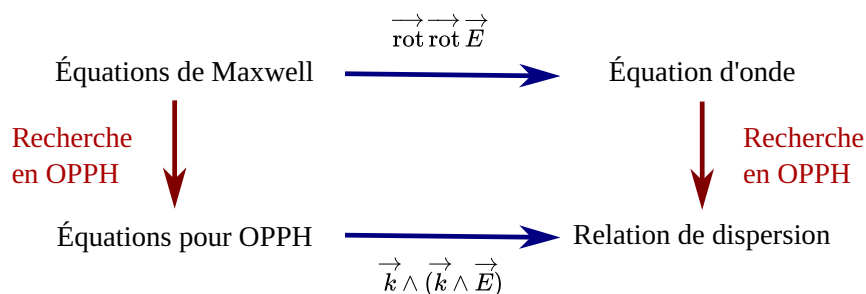


FIGURE 3.5 – Comment obtenir une relation de dispersion ou une équation d'onde ?

Les équations de Maxwell pour des OPPH ont été rappelées dans le chapitre 1. Dans les milieux L.H.I., il suffit de remplacer $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$:

Équations de Maxwell dans un milieu L.H.I. électrique pour une OPPH	
(MG)	$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$
(MA)	$i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_\ell - i \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \omega \vec{E}$
(MF)	$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$
(MT)	$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

Pour trouver la relation de dispersion, on utilise la loi d'Ohm dans l'équation de Maxwell-Ampère, et on introduit la relation de Maxwell-Faraday pour éliminer \vec{B} . On a alors :

$$i \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 (\sigma - i \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega) \vec{E}. \quad (3.35)$$

En développant le double produit vectoriel : $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} = -\vec{k}^2 \vec{E}$, on obtient alors

$$i \frac{-\vec{k}^2}{\omega} = \mu_0(\underline{\sigma} - i\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \omega), \quad (3.36)$$

soit finalement

$$\boxed{\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega \mu_0 \underline{\sigma}} \quad \text{ou} \quad \underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \omega} \right). \quad (3.37)$$

Pour comprendre cette relation de dispersion, il faut connaître la permittivité $\underline{\varepsilon}_r$ et la conductivité électrique $\underline{\sigma}$. La première a déjà été modélisée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. La seconde sera à déterminer. Nous allons étudier cette relation de dispersion dans deux cas limites : les très bons isolants et les très bons conducteurs.

Retour vers le passé

À ce stade, il est très utile et conseillé de relire attentivement les paragraphes 1.3.3 à 1.3.6 du chapitre 1. Toute l'analyse qui va suivre va s'intéresser aux parties réelles et imaginaires de k et de l'indice complexe \underline{n} d'un milieu. Une bonne intuition de ces grandeurs (dispersion et atténuation) est importante dans la suite.

4.1 Propagation dans un diélectrique

Pour circonscrire le champ d'étude, nous allons nous cantonner ici à la propagation des ondes dont la fréquence est proche du visible. Cela inclut les infrarouges, le visible et les UV, soit ce qui est communément appelé « la lumière ».

4.1.1 Cas idéal : le diélectrique parfait

Pour un isolant parfait, il n'y a pas de courant de charges libres, donc la loi d'Ohm donne $\sigma = 0$. La relation de dispersion se simplifie alors :

$$k = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r} \omega = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r} \frac{\omega}{c}. \quad (3.38)$$

On identifie ainsi l'indice optique du milieu

$$\boxed{\underline{n} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r}}. \quad (3.39)$$

On remarque que cet indice est une grandeur complexe !

La connaissance de la grandeur $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ permet donc d'en déduire l'indice du milieu, et de comprendre la propagation d'une onde. Comme nous nous restreignons à la gamme de fréquences de la lumière, on ne considère que la réponse due à la polarisabilité électronique. Le modèle de l'électron élastiquement lié donne une expression pour $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$, que nous allons mettre à profit.

Regardons de plus près les différents cas de l'équation (3.29) rappelée ci-dessous :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}. \quad (3.40)$$

- **Proche de la fréquence propre.** Si ω est assez proche de la fréquence propre ω_0 , alors on a une forte absorption de l'onde par le milieu. En effet, pour $|\omega - \omega_0| \ll 1/\tau$, la partie imaginaire de $\underline{\varepsilon}_r$ est maximale. À résonance on a

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) \approx 1 + i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \quad (3.41)$$

- **Hors des fréquences propres.** À l'inverse, si $|\omega - \omega_0| \gg 1/\tau$, on peut exprimer simplement la permittivité :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.42)$$

qui devient une grandeur réelle.

Cette expression est encore riche, mais on se focalise ici sur le cas le plus fréquemment rencontré : les pulsations propres ω_0 des atomes sont typiquement dans l'UV alors qu'on s'intéresse à des pulsations ω dans l'infrarouge ou au pire dans le visible, donc telles que $\omega < \omega_0$. On a $\varepsilon_r > 0$, donc $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ est réel. L'onde électromagnétique se propage avec dispersion dans un milieu transparent (sans atténuation puisque $n'' = 0$) d'indice $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$. Comme $\varepsilon_r, n > 1$, donc la vitesse de phase de l'OPPH est $v_\phi(\omega) = c/n(\omega) < c$. Les diélectriques sont dans le visible des milieux transparents avec une vitesse de propagation inférieure à c .

De plus, un développement limité de n montre qu'on peut l'écrire

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (\text{loi de Cauchy}) \quad (3.43)$$

avec A et B deux constantes positives.¹⁰ La loi de Cauchy est très bien vérifiée pour les milieux transparents. La figure 3.6 montre la très bonne adéquation de la loi de Cauchy pour le verre borosilicate BK7 (très classique pour la fabrication de lentilles) dans le visible. En revanche dans l'infrarouge on voit que la modélisation est moins bonne.

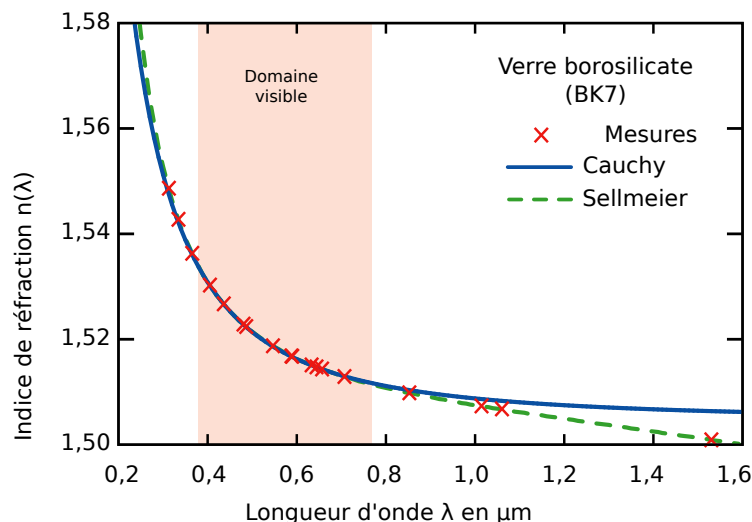


FIGURE 3.6 – Dispersion d'un verre borosilicaté et ajustement par la loi de Cauchy. Source : [Wikipédia](#)

La table 3.3 donne des exemples d'indices optiques pour des diélectriques avec des longueurs d'onde optique.

4.1.2 Puissance dissipée dans les diélectriques parfaits

Dans les diélectriques, l'apparition d'un courant de polarisation va donner la possibilité de transférer de l'énergie du champ électromagnétique vers le milieu. Comme déjà vu, la puissance volumique transférée s'écrit $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Pour un diélectrique parfait le seul courant non nul est \vec{j}_P donc la puissance moyenne vaut

$$\mathcal{P} = \langle \vec{j}_P \cdot \vec{E} \rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right\rangle. \quad (3.44)$$

10. Ce développement est fait dans le TD n°3.

Diélectrique	Indice optique typique dans le visible
Vide	1
Atmosphère à 20°	1,000 272
Eau à 20°	1,33
Fluorure de magnésium	1,38
Sel	1,531
Verres	1,47–1,74
Diamant	2,4175
Silicium	3,47
Antimoine d'indium	5,13

TABLE 3.3 – Quelques exemples d'indices optique de milieux diélectriques. Liste tirée de [Wikipédia](#).

En utilisant la notation complexe et l'équation d'état du diélectrique :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-i\omega \vec{P} \cdot \vec{E}^*) = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Re}(i\chi_e \vec{E} \cdot \vec{E}^*) = -\frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{2} \operatorname{Re}(i(1 + \varepsilon_r)) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{2} \varepsilon_r'' \quad (3.45)$$

Ainsi, la puissance dissipée dans le milieu diélectrique est associée à la partie imaginaire de ε_r . Un diélectrique parfait absorbe de l'énergie uniquement si la fréquence de l'onde est proche d'une de ses fréquences propres. C'est ce phénomène qui est utilisé dans les fours micro-ondes : on choisit une fréquence radio-fréquences proche d'une fréquence propre des molécules d'eau (qui composent majoritairement les aliments).

Propagation dans des diélectriques L.H.I. électriques

Lorsqu'une OPPH se propage dans un diélectrique L.H.I. :

- Dans un diélectrique parfait, $k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$ est réel. De plus $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. L'OPPH se propage dans le milieu à la vitesse de phase c/n , sans être atténuée mais avec de la dispersion.
- La dispersion dans un milieu diélectrique pour $\omega < \omega_0$ suit la loi de Cauchy.
- Si le diélectrique est faiblement conducteur, l'onde est atténuée, et transmet de l'énergie au milieu.

Conclusion sur la propagation dans les diélectriques

	Près de la résonance $ \omega - \omega_0 \ll \frac{1}{\tau}$	Loin de la résonance $ \omega - \omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$
Fonction diélectrique	$\varepsilon_r(\omega) \approx i\varepsilon_r''$	$\varepsilon_r(\omega) \approx \varepsilon_r' > 0$
Puissance vol. dissipée	$P_P \propto \varepsilon_r''$ donc grand	$P_P = 0$
Propagation	Att. et absorption de l'onde	Prop. avec disp. ($k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$) sans att.

4.1.3 Quelles applications ?

Une application technologique Nous venons de voir que le visible peut se propager sans atténuation dans les milieux transparents. Bien sûr on pense tout de suite à l'eau, le verre, et aussi des solides cristallins comme le sel ou le diamant. La lumière se propage à travers eux, mais beaucoup mieux : il est possible de guider la lumière dans ces matériaux. Le silicium est un matériau extrêmement utilisée de nos jours à cette fin : les fibres optiques sont constituées de silicium. Pour ces fibres optiques qui atteignent des milliers de kilomètres de long ¹¹ il est

11. Une carte des liaisons sous-marines en fibre optique : <https://www.submarinecablemap.com/>.

crucial de minimiser l'atténuation du signal. Mais le contrôle de la dispersion est aussi très important car c'est le facteur principal de limitation du débit ! Une fibre optique de Google posée en 2018 mesure 40 000 km avec un débit de 144 Tbit s⁻¹ ! C'est dire si la propagation dans les milieux diélectriques est au centre de la société moderne...

Pour rêver un peu Il existe des intérêts fondamentaux à la propagation des ondes dans les diélectriques. Un magnifique résultat vérifié expérimentalement est l'effet Cerenkov, qui est l'analogie du mur du son pour la lumière. La lumière se déplace dans l'eau à une vitesse $c/n \approx 150\,000 \text{ km s}^{-1}$. Si une particule chargée accélérée se déplace à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le milieu, alors une onde de choc lumineuse est créée. C'est aussi dans les milieux diélectriques que les chercheurs ont réussi à ralentir la lumière jusqu'à... la vitesse de 32 m s⁻¹ !

4.2 Propagation dans les conducteurs

La propagation des ondes dans les conducteurs est essentiellement influencée par les charges libres. Nous supposons par la suite qu'il n'y a pas de charges liées, et donc $\epsilon_r = 1$. En revanche, un champ électrique va créer un courant de charges libres, qu'il convient de déterminer en présence d'un champ oscillant.

La relation de dispersion (3.37) s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\underline{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (3.46)$$

Afin d'étudier la propagation des ondes, il faut déterminer l'expression de la conductivité $\underline{\sigma}$ grâce à une modélisation microscopique semblable à celle de l'électron élastiquement lié pour les diélectriques.

4.2.1 Champ statique

Si un conducteur est placé dans un champ électrique statique, les charges libres vont être mises en mouvement à cause de la force de Lorentz. Deux possibilités : soit le conducteur est relié à un circuit électrique, dans ce cas il s'établit un courant électrique qui vérifie la loi d'Ohm $\underline{j}_\ell = \sigma \underline{E}$; soit le conducteur est isolé et dans ce cas les charges qui subissent une force de Lorentz se réorganisent dans le conducteur jusqu'à annuler celle-ci, donc jusqu'à annuler le champ électrique à l'intérieur du milieu. Un champ statique \underline{E} ne peut pas pénétrer dans un conducteur.

Le raisonnement précédent demande une ré-organisation des charges, et donc implique une dynamique avec un temps de réponse. On conçoit donc que si le champ incident varie lentement (par rapport à un temps à déterminer), alors le conducteur aura toujours un champ nul en son sein. Le champ ne peut pas traverser le conducteur. Au contraire, si le champ varie très vite, la dynamique des charges pourrait ne pas être assez rapide pour assurer toujours $\underline{E} = \underline{0}$ dans le conducteur, et ainsi laisser passer une partie du champ. Le conducteur agit comme un filtre passe-haut.

Par ailleurs, ce raisonnement précédent montre qu'il y a une discontinuité du champ électrique dans le cas statique à la surface du conducteur, puisqu'il est non-nul à l'extérieur et nul à l'intérieur. Nous reverrons cet aspect dans le chapitre 4.

4.2.2 Loi d'Ohm

Afin de déterminer le mouvement d'un électron libre en présence d'un champ électrique oscillant, on peut adopter un modèle microscopique assez proche du modèle de l'électron élastiquement lié. Cependant, puisque les charges sont libres, la force de rappel est nulle ($\omega_0 = 0$). Il reste donc la force de Lorentz et la force de frottements, qui modélise l'interaction entre les porteurs de charges et le réseau.

L'équation (3.25) donne la vitesse d'un électron en notation complexe. Avec $\omega_0 = 0$:

$$\underline{v} = \frac{q}{m} \frac{-i\omega}{-\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \underline{E} = \frac{q\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \underline{E}. \quad (3.47)$$

On en déduit le courant électrique $\underline{j}_\ell = Nq\underline{v}$. On retiendra

Loi d'Ohm locale en régime sinusoïdal

En présence d'un champ électrique, un courant électrique s'établit qui est donné par la *loi d'Ohm locale*

$$\boxed{\vec{j}_\ell = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}} \quad (3.48)$$

où $\sigma_0 = \frac{Nq^2\tau}{m}$ est la conductivité à fréquence nulle.

Matériau	Conductivité σ_0 (en S m^{-1})
Argent	$6,1 \times 10^7$
Cuivre	$5,8 \times 10^7$
Or	$4,5 \times 10^7$
Eau de mer	0,2
Silicium	$4,3 \times 10^{-4}$
Eau distillée	2×10^{-4}
Verre pyrex	10^{-15}
Quartz	2×10^{-17}

TABLE 3.4 – Conductivités de différents matériaux : trois conducteurs, trois mauvais conducteurs et deux isolants.

Deux régimes bien distincts apparaissent dans les comportements des conducteurs :

Régime ohmique $\omega\tau \ll 1$: Lors d'une période d'oscillations du champ, les porteurs de charges subissent de nombreuses collisions. Le caractère oscillant du champ est « gommé », la conductivité devient réelle : $\underline{\sigma} \approx \sigma_0$ comme dans le régime continu.

Régime plasma $\omega\tau \gg 1$: À l'inverse, le temps entre deux collisions est grand devant la période du champ. Les porteurs de charges oscillent dans le champ électrique sans entrer en collision et donc sans dissiper l'énergie du champ. La conductivité est imaginaire pure, et décroît en $1/\omega$: $\underline{\sigma} \approx i\sigma_0 \frac{1}{\omega\tau}$. $\underline{\sigma}$ et \vec{E} sont en quadrature (comme le montre la présence du i).

Dans les métaux (cuivre, aluminium, etc.), le temps de relaxation est de l'ordre de $\tau = 10^{-14}$ s.¹² On est donc dans le régime ohmique pour les courants électriques usuels, les fréquences hertziennes jusqu'aux GHz. En revanche, pour les fréquences IR, visible puis UV on sort nettement de ce régime ohmique pour entrer dans le régime plasma.

Puissance échangée dans un conducteur Nous avons vu que la puissance volumique échangée entre un champ électromagnétique et des charges d'un conducteur s'écrit $\vec{j} \cdot \vec{E}$. En l'absence de charges liées, $\vec{j} = \vec{j}_\ell$. En notation complexe pour un champ oscillant, la puissance moyenne cédée au conducteur s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\sigma}) E_0^2. \quad (3.49)$$

On en déduit que c'est dans le régime ohmique qu'il y aura un maximum d'énergie transférée du champ vers les charges du conducteur. À l'inverse, dans le régime plasma $\underline{\sigma}$ est imaginaire pure, il n'y a pas d'énergie transférée.

4.2.3 Conducteur parfait

Pour un conducteur parfait, la conductivité est très grande $\sigma_0 \rightarrow \infty$ et on néglige les effets d'inertie $\tau \rightarrow 0$. Toutes les charges se mettent instantanément en mouvement à l'établissement d'un champ électrique.

12. cf. Ashcroft & Mermin, *Physique des solides*, Éd. EDP Sciences pour un tableau de valeurs du temps de relaxation dans le modèle de Drude.

Cela implique que $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$ à l'intérieur du conducteur car la densité de courant volumique \vec{j} doit rester une quantité finie dans la loi d'Ohm. Par conséquent, $\rho = \epsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0$. Il ne peut y avoir que des charges surfaciques dans un conducteur parfait. On peut comprendre ce résultat de la façon suivante : si un champ \vec{E} non nul apparaît dans le conducteur, les charges libres vont instantanément se mettre en mouvement vers la surface du conducteur pour écranter le champ à l'intérieur jusqu'à ce qu'il disparaisse. On retrouve qualitativement le résultat du paragraphe 4.2.1 mais pour un champ variable.

De plus, la relation de Maxwell-Faraday avec $\vec{E} = \vec{0}$ donne $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. Seuls les champs magnétiques constants peuvent être présents dans un conducteur parfait. Au passage, dans un supraconducteur, l'effet Meissner et la création d'un courant de surface va également écranter tout champ magnétique, même constant.

Le conducteur parfait se comporte comme un écran bloquant les ondes électromagnétiques quelle que soit sa fréquence (et la réfléchit intégralement). Toutes les ondes sont réfléchies (c'est ce qu'on attend d'un miroir). Un système enfermé dans un conducteur parfait ne ressent donc pas l'effet de perturbations électromagnétiques extérieures : c'est l'effet de cage de Faraday, très utilisé technologiquement (les câbles coaxiaux utilisent ce principe, c'est la raison pour laquelle on met une carcasse métallique autour d'appareils électroniques ou pour laquelle rester dans sa voiture est plus sûr lors d'un orage).

La limite du conducteur parfait intervient lorsque σ_0 n'est pas infinie (à comparer à d'autres grandeurs du système), et que l'inertie entre en jeu.

4.2.4 Conducteurs ohmiques

Les conducteurs solides (métaux) ont des temps caractéristiques $\tau \sim 10^{-14}$ s. Pour toutes les ondes radio et microondes ($\omega < 10^{12}$ rad s⁻¹), nous pourrions négliger les effets d'inertie, et approximer $\underline{\sigma} \approx \sigma_0$.

La relation de dispersion 3.46 s'écrit donc :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (3.50)$$

Nous allons étudier deux cas limites selon la valeur du paramètre sans dimension $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}$:

- les bons conducteurs $\sigma_0 \gg \epsilon_0 \omega$
- les mauvais conducteurs $\sigma_0 \ll \epsilon_0 \omega$

Noter que la « qualité » d'un conducteur n'est donc pas intrinsèque au matériau, mais dépend de la fréquence de l'onde envoyée. Par exemple le cuivre est un bon conducteur tant que $\omega \ll \frac{6 \times 10^7}{8,9 \times 10^{-12}} \approx 6 \times 10^{18}$ rad s⁻¹. Donc le cuivre reste un très bon conducteur dans toute la gamme d'étude, puisqu'à partir de 10^{13} rad s⁻¹ on quitte le régime ohmique.

(3.51)

4.2.4.1 Bons conducteurs Pour les bons conducteurs, la relation de dispersion se simplifie

$$\underline{k}^2 = i \sigma_0 \mu_0 \omega. \quad (3.52)$$

Avec la racine complexe de i : $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ¹³, on trouve un vecteur d'onde complexe

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} (1 + i). \quad (3.53)$$

Les parties réelle et imaginaire de \underline{k} (k' et k'') sont égales et valent :

$$k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}. \quad (3.54)$$

13. La seconde racine complexe $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ donnerait $k'' < 0$, donc une amplification, ce qui n'est pas physique dans la situation actuelle.

Définition

On définit l'*épaisseur de peau* d'un métal comme la distance δ typique sur laquelle une OPPH va pénétrer dans le milieu. D'après l'expression précédente, celle-ci s'écrit

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}. \quad (3.55)$$

Après quelques δ , l'amplitude du champ devient négligeable dans le matériau. C'est l'*effet de peau*.

ν	50 Hz	500 kHz	200 MHz	2×10^{12} Hz
δ	10 mm	0,1 mm	5 μ m	50 nm

TABLE 3.5 – Épaisseurs de peau pour le cuivre (de conductivité $\sigma_0 = 5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}$) à différentes fréquences.

L'amplitude complexe de l'OPPH s'écrit alors

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}. \quad (3.56)$$

4.2.4.2 Mauvais conducteurs Dans le cas opposé où $\sigma_0 \ll \varepsilon_0 \omega$, la relation de dispersion est dominée par le terme habituel $\frac{\omega^2}{c^2}$, l'autre terme est une correction. Par un développement limité, on trouve

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} + i \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (3.57)$$

Il apparaît une longueur caractéristique $\ell_p = \frac{2}{\sigma_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, indépendante de la pulsation, qui correspond à la distance typique sur laquelle le champ va être atténué. En effet, le champ électrique s'écrit en posant $k_0 = \omega/c$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\ell_p} \cos(k_0 z - \omega t). \quad (3.58)$$

L'onde se propage sans dispersion (comme dans le vide), mais avec une amplitude qui décroît sur une distance caractéristique ℓ_p .

4.2.5 Conducteurs en régime plasma

Des gaz peuvent se transformer en conducteurs si on ionise une partie des atomes ou molécules qui le composent. On rencontre des plasmas dans la vie quotidienne : dans l'ionosphère (partie haute de l'atmosphère), les molécules sont ionisées par les rayonnements très énergétiques venant du Soleil. La flamme d'une bougie possède également une partie qui abrite un plasma. Les aurores boréales ou les lampes fluocompactes aussi.

Dans ces milieux, les collisions deviennent négligeables, et les effets inertiels prennent le pas dans la conductivité, qui devient imaginaire pure :

$$\underline{\sigma}(\omega) = i \frac{\sigma_0}{\omega \tau} = i \frac{\omega_p^2}{\omega} \varepsilon_0 \quad (3.59)$$

avec ω_p la pulsation plasma du milieu. On obtient à partir de l'équation (3.46) la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (3.60)$$

Typiquement, on a ω_p dans l'ultraviolet pour les métaux ($\omega_p = 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ pour le cuivre). Pour les plasmas où la densité électronique est plusieurs ordres de grandeur inférieure ω_p est dans les fréquences radio ($\omega_p = 5 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1}$ pour l'ionosphère).

Propagation à haute fréquence $\omega > \omega_p$ Dans ce cas, $k^2 > 0$, donc $k \in \mathbb{R}$. On a

$$k(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}. \quad (3.61)$$

Les ondes se propagent dans le plasma avec dispersion (v_ϕ dépend de ω), mais sans atténuation ($k'' = 0$). Sur le graphique 3.7 sont tracées les deux vitesses de phase et de groupe. On remarque que :

- la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière c , ce qui n'est pas problématique puisque v_ϕ n'est pas associée à un transport d'information. La vitesse v_g en revanche reste inférieure à c .
- Si ω est proche de ω_p , alors la vitesse de groupe est très petite devant c , la vitesse de phase est très grande et varie très vite, le plasma a un fort effet dispersif sur la propagation.
- Si $\omega \gg \omega_p$, les vitesses v_ϕ et v_g sont très proches de c et dépendent peu de la pulsation. On retrouve la propagation dans le vide. Le plasma n'influence que marginalement la propagation de l'onde.

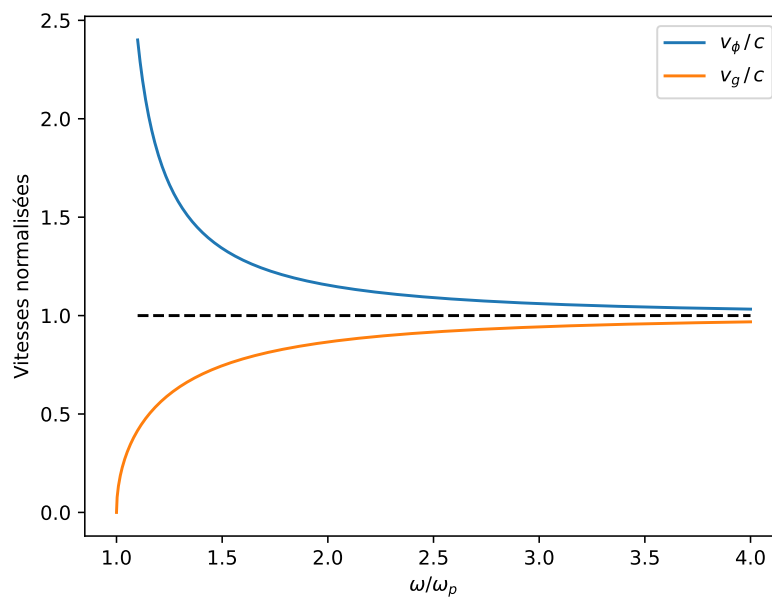


FIGURE 3.7 – Graphe des vitesses de groupe et de phase en fonction de la pulsation ω , dans le cas $\omega > \omega_p$.

Propagation à basse fréquence $\omega < \omega_p$ Le cas opposé à $k^2 < 0$, donc k imaginaire pur. L'onde ne se propage pas ($k' = 0$), son amplitude s'atténue ($k'' > 0$). Il s'agit d'une onde stationnaire. Cette atténuation n'est cependant pas accompagnée d'une absorption par le milieu, puisque $\text{Re}(\sigma) = 0$ dans ce cas. L'énergie n'est pas récupérée par le milieu, on montre qu'elle est renvoyée dans la direction incidente sous forme d'onde réfléchie.

Exemple : propagation dans la ionosphère On retrouve ces résultats avec la ionosphère, une couche haute de l'atmosphère. La fréquence plasma vaut approximativement $f_p = 1 \times 10^7$ Hz. ¹⁴ Pour communiquer avec un satellite en plein jour, on utilise des fréquences $f > f_p$, et en pratique on utilise des fréquences 20 GHz.

Propagation dans des conducteurs électriques

La propagation d'une OPPH dans un milieu conducteur dépend de plusieurs paramètres :

- Dans un conducteur parfait, l'onde ne peut pas se propager, elle est en fait réfléchie intégralement à la surface.

14. http://olivier.granier.free.fr/PC-Montesquieu445072/cariboost_files/PC-ondes-EM-plasma.pdf

- Si le milieu est un bon conducteur ohmique (cas des métaux), alors l'onde ne pénètre dans le milieu que sur une épaisseur appelée **épaisseur de peau**, qui diminue lorsque ω augmente.
- Dans un mauvais conducteur ohmique, l'onde se propage sans dispersion en étant atténuée. L'énergie récupérée par le conducteur est dissipée par effet Joule.
- Dans le cas d'un plasma, tout dépend de la pulsation d'excitation par rapport à la pulsation plasma. Si $\omega < \omega_p$, l'onde ne se propage pas, c'est une onde stationnaire, réfléchi par le plasma. Au contraire si $\omega > \omega_p$, l'onde se propage avec dispersion mais sans atténuation.

Conclusion sur la propagation dans les conducteurs

	Régime ohmique	Plasma $\omega > \omega_p$	Plasma $\omega < \omega_p$
Conductivité	σ_0 réelle	$\sigma \in \mathbb{R}$	$\sigma \in i\mathbb{R}$
Puissance vol. dissipée	$\mathcal{P} \propto \text{Re}(\sigma)$ grande	nulle	nulle
Propagation	Prop et att. Effet de peau	Prop. avec dispersion	Onde évanescence

Compétences à maîtriser

- ✓ Déterminer une relation de dispersion à partir d'une équation d'onde.
- ✓ Interpréter une relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ donnée en terme de propagation, dispersion et absorption.
- ✓ Différencier conducteurs (effet de peau) et isolant (transparent dispersifs) dans des gammes de fréquences optiques.
- ✓ Maîtriser les nombres complexes, en particulier le calcul de \sqrt{i} .

Chapitre 4

Interfaces, réflexion et transmission

Sommaire

1	Relations de passage	86
2	OPPH à l'interface entre deux milieux : position du problème	87
3	Conservation de la pulsation	89
4	Lois de Descartes	90
5	Coefficients de Fresnel	91
5.1	Réflexion en incidence normale	91
5.2	Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence	94
5.3	Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence	96
5.4	Réflexion totale	98
6	Propagation guidée	100
6.1	Deux plans conducteurs	101
6.2	Guide rectangulaire	103
6.3	Propagation dans une fibre optique	104
7	Annexe : démonstration des relations de passage (*)	105
7.1	Composante normale du champ électrique	105
7.2	Composante normale du champ magnétique	106
7.3	Composante tangentielle du champ magnétique	106
7.4	Composante tangentielle du champ électrique	107

Objectifs

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la propagation des ondes dans le vide et dans les milieux matériels. Nous avons omis de discuter les effets pourtant fréquents se déroulant à l'interface entre deux milieux. Dans ce chapitre, nous allons discuter la physique à l'interface entre deux diélectriques pour des champs électrique et magnétique. Nous commencerons par donner les relations de passage générales aux interfaces en partant des équations de Maxwell. Ensuite, nous étudierons plus précisément ce qu'il advient d'une onde électromagnétique arrivant en incidence oblique et avec une polarisation quelconque sur une interface.

Pour écrire les équations de Maxwell, on a fait l'approximation des milieux continus : nous avons travaillé dans des milieux dans lesquels la densité de charge volumique ρ et la densité de courant volumique \vec{j} sont des fonctions continues de l'espace à trois dimensions. Dans cette modélisation (la plus proche de la réalité), les quatre champs électriques et magnétiques sont continus.

Cependant, il est souvent commode d'utiliser une description bidimensionnelle dans certaines situations, typiquement à une interface. Cette modélisation permet de traiter une épaisseur e d'interface en un plan infiniment fin. Cela simplifie la description de systèmes, mais apporte également des contreparties dues au passage à la limite $e \rightarrow 0$: on voit apparaître des discontinuités des champs à l'interface.

Dans ce chapitre, on décrit d'abord les discontinuités dues aux descriptions non volumique d'une distribution de courants ou de charges, puis on les utilise pour comprendre les effets de réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à une interface.

1 Relations de passage à l'interface de deux milieux

Bien que la matière soit tri-dimensionnelle, il est souvent pratique de modéliser un changement de milieu comme une transition à travers une interface infiniment fine, et donc de considérer potentiellement des charges ou des courants répartis en surface. Ce passage à la limite d'une interface épaisse à une interface infiniment fine arrive cependant avec un inconvénient : les champs électromagnétiques normalement continus dans l'espace tridimensionnel peuvent avoir des discontinuités à une interface d'épaisseur nulle.

Cas des conducteurs Lorsqu'on applique un champ électrique constant sur un conducteur, on a vu dans le chapitre précédent que les charges se mettaient en mouvement afin d'écranter le champ à l'intérieur du milieu. On a donc une situation où d'un côté de l'interface le champ est non nul, et de l'autre il est écranter. En faisant tendre l'interface vers une épaisseur nulle, on obtient une discontinuité du champ, due à la présence d'une densité surfacique.

Plus précisément, on peut trouver la valeur du champ électrique au voisinage de l'interface. En effet, soit une surface élémentaire dS autour d'un point P de l'interface, avec une densité surfacique $\sigma(P)$. Si on se place très près de l'interface, celle-ci paraîtra plane et infinie. Alors que le champ interne \vec{E}_{int} est nul, le champ à l'extérieur est donc celui créé par un plan infini :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}. \quad (4.1)$$

Le champ électrique extérieur a été écranter (« masqué ») par la densité de charge.

On remarque : (a) la composante normale du champ est discontinue, pas la composante tangentielle et (b) cette discontinuité est due à la présence d'une densité de charge surfacique.

On peut généraliser ce résultat à une interface quelconque entre deux milieux :

Relations de passage à une interface

Soit deux milieux (1) et (2) d'indices respectifs n_1 et n_2 , séparés par une surface chargée avec la densité de charges libres $\sigma_\ell(M)$ et parcourue par une densité de courant surfacique $\vec{j}_{s,\ell}(M)$. On note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire orthogonal à la surface et orienté du milieu (1) vers le milieu (2) (voir figure 4.1). On a alors (« normale » et « tangentielle » étant relatifs à l'interface) :

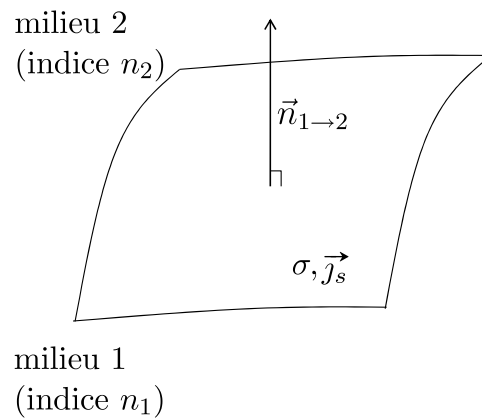
Relations de passage dans les milieux		Eq. de Maxwell
Discontinuité de la composante normale de \vec{D}	$D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma_\ell$	MG
Continuité de la composante tangentielle de \vec{E}	$\vec{E}_{t,2} - \vec{E}_{t,1} = 0$	MF
Continuité de la composante normale de \vec{B}	$B_{n,2} - B_{n,1} = 0$	MT
Discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B}	$\vec{B}_{t,2} - \vec{B}_{t,1} = \mu_0 \vec{j}_{s,\ell} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$	MA

où « normale » et « tangentielle » sont relatifs à l'interface.

Les démonstrations des relations de passage étant assez techniques, elles sont déplacées en annexe à la fin du chapitre. L'essentiel de cette partie étant de connaître le résultat et de savoir l'utiliser.

La présence d'un courant surfacique $\vec{j}_{s,\ell}$ nécessite, pour un milieu vérifiant la loi d'Ohm, que celui-ci soit un conducteur parfait. En se limitant aux milieux diélectriques et aux milieux conducteurs réels, on pourra sereinement poser $\vec{j}_{s,\ell} = \vec{0}$.¹ Ainsi, les composantes normale et tangentielle du champ magnétique sont continues à une interface (hors conducteur parfait).

1. Il existe des matériaux isolants en volume, mais pouvant posséder des courants surfaciques : les isolants topologiques. Nous excluons ces matériaux.

FIGURE 4.1 – Interface séparant les deux milieux d'indice n_1 et n_2 , de vecteur normal $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Pour ce qui est de la charge surfacique : les diélectriques ont bien sûr une charge surfacique, mais celle-ci est comprise dans la définition de \vec{D} . La charge surfacique σ_ℓ est une éventuelle charge de surface *libre*. Elle n'est pas présente dans les diélectriques parfaits. Dans les conducteurs, il est fréquent d'avoir une charge de surface. En utilisant la relation $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, on obtient les relations de passage suivantes :

Relations de passage en l'absence de courant de surface

	Diélectriques	Conducteurs
Continuité de la composante normale de \vec{D}	$\varepsilon_{r,2} E_{n,2} = \varepsilon_{r,1} E_{n,1}$	$\varepsilon_{r,2} E_{n,2} - \varepsilon_{r,1} E_{n,1} = \sigma_\ell$
Continuité de la composante tangentielle de \vec{E}	$\vec{E}_{t,2} = \vec{E}_{t,1}$	$\vec{E}_{t,2} = \vec{E}_{t,1}$
Continuité du champ magnétique	$\vec{B}_2 = \vec{B}_1$	$\vec{B}_2 = \vec{B}_1$

Remarque Dans les milieux diélectriques, la composante normale du vecteur déplacement est continue. Attention cependant, dès que $n_1 \neq n_2$, le champ électrique \vec{E} n'est *pas* continu à l'interface. En effet, la continuité de la composante normale de \vec{D} donne :

$$\varepsilon_{r,2} E_{n,2} = \varepsilon_{r,1} E_{n,1} \quad \text{soit} \quad \frac{E_{n,2}}{E_{n,1}} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \neq 1. \quad (4.2)$$

La composante normale du champ électrique n'est jamais continue à une interface entre deux milieux d'indices différents.

Compétences à maîtriser

- ✓ Justifier l'existence d'une discontinuité du champ \vec{E} à une interface.
- ✓ Connaître les relations de passage pour \vec{E}_t , D_n et \vec{B} en l'absence de courant de surface. Savoir quelles composantes sont continues ou discontinues.

2 OPPH à l'interface entre deux milieux : position du problème

On souhaite étudier le comportement d'une onde électromagnétique à l'interface entre deux milieux homogènes isotropes parfaitement transparents : on caractérise ces milieux par leur indice n_1 et n_2 respectivement. Ceux-ci sont réels pour les milieux diélectriques, mais peuvent être complexes dans le cas des métaux.

On se contentera ici d'étudier ce qu'il se passe lorsque l'onde électromagnétique arrive sur une interface suffisamment plane, c'est-à-dire plane à l'échelle de la longueur d'onde. On pourra alors négliger les phénomènes

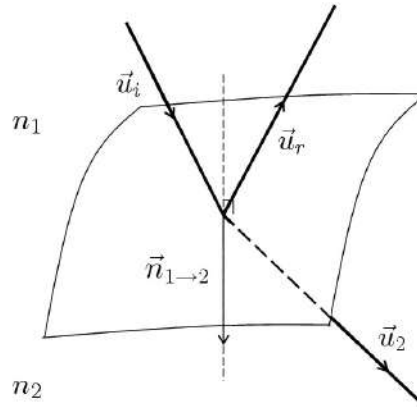


FIGURE 4.2 – Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques : position du problème

de diffusion et de diffraction, qui seront étudiés plus tard dans le cours. L'interface étant assimilée à un plan, on peut munir l'espace d'un repère cartésien de façon à ce que l'équation de l'interface plane s'écrive $z = 0$.

Une onde plane homogène progressive harmonique (OPPH) incidente, polarisée rectilignement, de pulsation ω , se propage dans le milieu (1) dans la direction \vec{e}_i . L'expérience montre que l'onde donne naissance à deux ondes électromagnétiques : l'**onde réfléchie** et l'**onde transmise**, dont on souhaite trouver les caractéristiques.

En notation complexe, l'onde incidente de vecteur d'onde \vec{k}_i est notée :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{n_1}{c} \vec{e}_i \wedge \vec{E}_i, \end{cases} \quad (4.3)$$

l'onde réfléchie est notée :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega_r} \wedge \vec{E}_r = \frac{n_1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}_r, \end{cases} \quad (4.4)$$

et l'onde transmise est notée :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \\ \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t}{\omega_t} \wedge \vec{E}_t = \frac{n_2}{c} \vec{e}_t \wedge \vec{E}_t. \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut synthétiser l'expression des champs électrique et magnétique dans les deux milieux :

Milieu 1	Milieu 2
$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \\ \vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \vec{e}_i \wedge \vec{E}_i + \frac{n_1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}_r \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \\ \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} \vec{e}_t \wedge \vec{E}_t \end{cases}$

Les exponentielles sont une famille libre

On utilisera régulièrement le résultat suivant : les fonctions $f_\alpha(x) = \exp(i\alpha x)$ sont linéairement indépendantes pour des valeurs différentes de α . Ceci signifie que si s_i , s_r et s_t sont tous non nuls, alors :

$$\forall x, \quad s_i e^{i\alpha_i x} + s_r e^{i\alpha_r x} = s_t e^{i\alpha_t x} \implies \alpha_i = \alpha_r = \alpha_t. \quad (4.6)$$

Démonstration de la liberté de la famille des exponentielles (★)

Supposons par l'absurde que les trois coefficients α ne sont pas identiques. Si un des coefficient

- Si deux coefficients sont identiques, mais pas le troisième. Par exemple : $\alpha_i = \alpha_r \neq \alpha_t$. Alors on a $(s_i + s_r) e^{i\alpha_i x} = s_t e^{i\alpha_t x}$, ou encore $(s_i + s_r) e^{i(\alpha_i - \alpha_t)x} = s_t$. Le terme de gauche est une fonction de x , le terme de droite une constante. Donc il faut soit que $s_i + s_r = 0$, mais alors $s_t = 0$ ce qui est absurde, soit $\alpha_i = \alpha_r$ absurde également.
- Si les trois coefficients α sont différents deux à deux, réécrivons par commodité l'équation sous la forme $a e^{i\alpha_1 x} + b e^{i\alpha_2 x} + c e^{i\alpha_3 x} = 0$. Celle-ci est vraie pour tout x , en particulier pour $x = 0, 1$ et 2 . En écrivant ces trois équations sous forme matricielle, il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} & e^{i\alpha_3} \\ e^{2i\alpha_1} & e^{2i\alpha_2} & e^{2i\alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

Soit M la matrice ci-dessus. C'est la (transposée) d'une matrice de Vandermonde. Puisque tous les α_i sont différents deux à deux, elle est inversible. Donc la seule façon pour que cette équation soit vérifiée est que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \text{ ce qui est absurde. CQFD}$$

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir énoncer et utiliser le résultat mathématique

3 Conservation de la pulsation

Les composantes du champ \vec{E} sont toutes de la forme, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$\underline{E}_i(M, t) = \underline{E}_{i,0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.8)$$

On peut choisir l'amplitude incidente comme réelle. Cependant rien n'implique que les amplitudes réfléchiée et transmise le soit. Les relations de passage impliquent la continuité des composantes tangentielles de \vec{E} , ce qui implique par exemple pour E_x

$$\underline{E}_{x,i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \underline{E}_{x,r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} = \underline{E}_{x,t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)}, \forall M \in \text{interface (i.e. } z = 0). \quad (4.9)$$

Si on écrit cette équation en $\vec{r} = \vec{0}$, on obtient alors :

$$\underline{E}_{x,i} e^{-i\omega t} + \underline{E}_{x,r} e^{-i\omega_r t} = \underline{E}_{x,t} e^{-i\omega_t t}, \forall t. \quad (4.10)$$

Par conséquent, $\omega_r = \omega_t = \omega$: les ondes incidentes, réfléchies et transmises ont la même pulsation qu'on notera ω .

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, la dépendance temporelle ne sera plus écrite explicitement dans les notations complexes.

Compétences à maîtriser

- ✓ Savoir justifier que les ondes incidente, réfléchiée et transmise ont la même fréquence.

4 Lois de Descartes

Maintenant on peut s'intéresser aux contraintes qu'imposent la continuité des composantes sur la partie spatiale de la phase, donc le vecteur d'onde. Réécrivons la relation de passage pour une composante tangentielle (E_x par exemple) :

$$E_{x,i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + E_{x,r} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = E_{x,t} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}}, \forall M \in \text{interface (i.e. } z = 0). \quad (4.11)$$

soit, en développant les produits scalaires :

$$E_{x,i} e^{ik_{ix}x + ik_{iy}y} + E_{x,r} e^{ik_{rx}x + ik_{ry}y} = E_{x,t} e^{ik_{tx}x + ik_{ty}y}, \forall x, \forall y \quad (4.12)$$

En prenant le cas particulier $y = 0$, le résultat mathématique nous donne que $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$. Et de même, en prenant $x = 0$ on obtient $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$.

Par conséquent, les composantes tangentielles des vecteurs d'onde incident, réfléchi et transmis sont égales à l'interface.

On peut alors choisir les axes x et y du repère de telle façon que le plan incident soit le plan (Oxz) . Dans ce cas $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = 0$, ce qui démontre la première loi de Descartes pour la réflexion et la réfraction : les vecteurs d'ondes des ondes réfléchies et transmises sont dans le plan d'incidence (plan défini par le vecteur d'onde incident et la normale au dioptre au point d'incidence).

Le problème pouvant désormais être traité comme un problème à deux dimensions, nous pouvons refaire la figure 4.2 dans le plan (Oxz) et en profiter pour définir les angles d'incidence i_1 , de réflexion i_r et de réfraction i_2 . Les vecteurs d'ondes s'écrivent :

$$\vec{k}_i = k_i (\cos i_1 \vec{e}_z + \sin i_1 \vec{e}_x) \quad (4.13)$$

$$\vec{k}_r = -k_r (\cos i_r \vec{e}_z + \sin i_r \vec{e}_x) \quad (4.14)$$

$$\vec{k}_t = k_t (\cos i_2 \vec{e}_z + \sin i_2 \vec{e}_x) \quad (4.15)$$

avec $k_i = k_r = k_1 = \frac{n_1 \omega}{c}$ et $k_t = k_2 = \frac{n_2 \omega}{c}$ d'après les relations de dispersion dans les deux milieux.

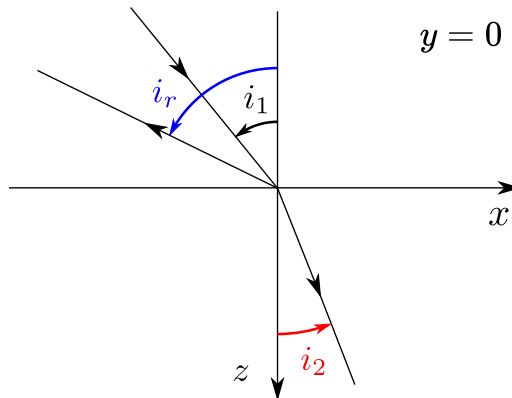


FIGURE 4.3 – Interface bidimensionnelle

L'égalité $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ devient alors : $k_i \sin i_1 = -k_r \sin i_r = k_t \sin i_2$. On en déduit la deuxième loi de Descartes pour la réflexion et la réfraction.

Les lois de Descartes

Lois de la réflexion

1. Les rayons incident et réfléchi sont dans le même plan.
2. Les angles d'incidence et de réflexion vérifient $i_1 = -i_r$.

Lois de la réfraction

1. Les rayons incident et réfracté sont dans le même plan.
2. les angles d'incidence et de réfraction vérifient $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître et savoir redémontrer les lois de Descartes

5 Coefficients de Fresnel

Jusqu'à maintenant, on n'a pas appris beaucoup de nouveautés : les équations de Maxwell sont linéaires, donc toutes les ondes ont la même fréquence, et elle vérifient les lois de Descartes déjà vues au lycée et en L1.

On souhaite maintenant calculer le champ réfléchi et le champ transmis à la traversée de l'interface entre les deux milieux diélectriques.

5.1 Réflexion en incidence normale

On commence par s'intéresser au cas d'une onde arrivant en incidence normale sur l'interface, donc \vec{k}_i est parallèle à la normale à la surface. Les champs \vec{E} et \vec{B} étant perpendiculaires à \vec{k} , ils sont parallèles à l'interface quelle que soit leur polarisation. Prenons par exemple $\vec{E}_{0i} = \underline{E}_{0i} \vec{e}_x$.

Définition

On définit les coefficients de **réflexion et de transmission en amplitude** par respectivement

$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}. \quad (4.16)$$

Ces deux coefficients sont potentiellement complexes.

Interprétation des parties réelle et imaginaires Afin de comprendre l'intérêt d'avoir des coefficients complexes, écrivons $\underline{r} = r e^{i\varphi}$. Le champ réfléchi en notation réelle sera :

$$E_r = \text{Re}(\underline{r} E_i) = r E_i \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (4.17)$$

Ainsi, on comprend que le module de \underline{r} joue sur l'*amplitude relative* du champ réfléchi par rapport au champ incident, alors que l'angle φ joue sur le *déphasage* entre les champ réfléchi et incident.

Expression des champs incident, réfléchi et transmis Le vecteur d'onde de l'onde incidente s'écrit $\vec{k}_i = \frac{n_1 \omega}{c} \vec{e}_z$. On a alors (on rappelle que la dépendance temporelle est implicite) :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \underline{E}_{0i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \vec{e}_x \\ \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1 \underline{E}_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \vec{e}_y. \end{cases} \quad (4.18)$$

Par les lois de Descartes, le vecteur d'onde de l'onde réfléchie s'écrit $\vec{k}_r = -\frac{n_1 \omega}{c} \vec{e}_z$. On peut montrer que le champ réfléchi est aussi polarisé selon \vec{e}_x , et on a donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \underline{r} \underline{E}_{0i} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \vec{e}_x \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{r n_1 \underline{E}_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \vec{e}_y. \end{cases} \quad (4.19)$$

Enfin, le vecteur d'onde de l'onde transmise s'écrit $\vec{k}_t = \frac{n_2\omega}{c}\vec{e}_z$, et on a

$$\begin{cases} \vec{E}_t = t\vec{E}_{0i} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \vec{e}_x \\ \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{tn_2\vec{E}_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \vec{e}_y. \end{cases} \quad (4.20)$$

Conditions aux limites La continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{B} donne deux équations :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ n_1 - n_1 r = n_2 t. \end{cases} \quad (4.21)$$

En inversant le système de deux équations à deux inconnues, on en déduit les expressions de r et t :

Relations de Fresnel en incidence normale – coefficients en amplitude

Si une onde arrive sur une interface en incidence normale entre deux diélectriques, alors ses coefficients de réflexion et transmission en amplitude sont donnés par :

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \quad (4.22)$$

- $0 \leq t \leq 1$ est un réel positif. L'onde transmise est en phase avec l'onde incidente.
- $-1 \leq r \leq 1$ est un réel dont le signe dépend de $n_1 - n_2$: si $n_1 < n_2$ qui est le cas habituel d'une onde se propageant dans le vide et se réfléchissant sur un diélectrique, alors $r < 0$. L'onde réfléchie est déphasée de π par rapport à l'onde incidente ! Si $n_1 > n_2$, alors $r > 0$ et l'onde réfléchie est en phase.

Attention à l'interprétation des coefficients r et t . On aurait naïvement envie de dire que la « conservation de l'onde » imposerait que l'amplitude incidente soit égale à la somme des amplitudes réfléchie et transmise, soit $1 = r + t$. Or nous l'avons vu, ceci n'est pas vérifié (il suffit de regarder les conditions aux limites). Ce qui est conservé en physique, c'est l'énergie de l'onde !

Coefficients de réflexion et transmission en énergie On s'intéresse ici à une description en terme d'énergie, et on cherche à savoir quelle proportion d'énergie incidente est réfléchie ou transmise. À partir des vecteurs de Poynting (puissance par unité de surface) des trois ondes, on définit de nouveaux coefficients :

Définition

On définit les coefficients de **réflexion et transmission en énergie** par les rapports des puissances surfaciques traversant l'interface :

$$R = \frac{-\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}. \quad (4.23)$$

Attention, nous avons manipulé jusqu'à présent les expressions complexes, il faut être attentif lorsqu'on calcule des quantités quadratiques. Pour rappel, on peut écrire une valeur moyenne d'une grandeur quadratique comme le vecteur de Poynting directement avec les champs complexes en utilisant la formule :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}). \quad (4.24)$$

Pour une OPPH, on a une relation simple pour le champ \vec{B} . Ainsi, on peut écrire :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\vec{E} \wedge (\vec{k}^* \wedge \vec{E}^*)) = \frac{1}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\|\vec{E}\|^2 \vec{k}^*) = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2\mu_0\omega} \text{Re}(\vec{k}) \quad (4.25)$$

où on a utilisé que le champ électrique est orthogonal au vecteur d'onde.

Revenons au problème de réflexion en incidence normale : on peut donc calculer les moyennes des vecteurs de Poynting des ondes incidente, réfléchie et transmise au niveau de l'interface (en $z = 0$) (les vecteurs d'onde étant réels) :

$$\begin{cases} \langle \vec{\Pi}_i(\vec{0}) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} n_1 E_{0i}^2 \frac{\vec{k}_i}{k_i} \\ \langle \vec{\Pi}_r(\vec{0}) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} n_1 |r|^2 E_{0i}^2 \frac{\vec{k}_r}{k_r} \\ \langle \vec{\Pi}_t(\vec{0}) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} n_2 |t|^2 E_{0i}^2 \frac{\vec{k}_t}{k_t} \end{cases} \quad (4.26)$$

On en déduit donc que :

Relations de Fresnel en incidence normale – coefficients en énergie

Si une onde arrive sur une interface en incidence normale entre deux diélectriques, alors ses coefficients de réflexion et transmission en énergie sont donnés par :

$$R = |r|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (4.27)$$

Ces coefficients sont nécessairement positifs, et compris entre 0 et 1. De plus, on vérifie sans difficulté la relation

$$R + T = 1. \quad (4.28)$$

Celle-ci traduit la conservation de l'énergie : l'énergie incidente est soit réfléchie, soit transmise. Nous n'avons pas pris en compte une éventuelle absorption à l'interface.

Question d'investigation

Un étudiant distrait regarde le ciel à travers une fenêtre de la salle de classe. Quel est le pourcentage de la puissance incidente qui arrive à ses yeux ?

Cas d'une incidence oblique Dans le cas d'une incidence oblique, les expressions des coefficients de réflexion et transmission en énergie sont légèrement modifiées. En effet, comme ils font intervenir les projections des vecteurs d'onde sur la normale à l'interface, on montre que

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |t|^2. \quad (4.29)$$

On peut vérifier à nouveau la conservation de l'énergie : $R + T = 1$.

Notion d'impédance électromagnétique (*) En étudiant la propagation des ondes, on est souvent amenés à considérer le passage d'un milieu à un autre. Dans le cas des ondes électromagnétiques, les milieux sont caractérisés par leur indice optique n . De façon générale pour le passage d'une onde (électromagnétique ou mécanique), on introduit une grandeur qui va caractériser son comportement à l'interface. Cette quantité est le rapport de deux grandeurs conjuguées.

Définition

On appelle *impédance électromagnétique* la grandeur

$$Z = \frac{E}{\underline{B}/\mu_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (4.30)$$

On définit en particulier l'impédance du vide $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega$. L'impédance d'un milieu non-magnétique s'écrit

à partir de l'impédance du vide :

$$Z = \frac{Z_0}{n}. \quad (4.31)$$

L'impédance faisant intervenir l'indice optique, on peut réécrire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude sous la forme :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (4.32)$$

Tout système physique va alors être caractérisé par une impédance : un milieu, une ligne électrique, un guide d'onde, etc. et c'est la comparaison des impédances à une interface qui va permettre de savoir si une onde va être majoritairement transmise ou réfléchi. La notion d'impédance est générale en physique. En particulier elle est présente pour les ondes mécaniques, à l'interface entre deux milieux (c'est le rapport des champs de pression et de vitesse). On peut également définir une impédance pour les ondes de matière en mécanique quantique. Les expressions (4.32) sont générales, elles se retrouvent telles quelle dans les autres domaines, d'où leur intérêt.

5.2 Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Intéressons-nous maintenant au cas d'une incidence non normale (oblique). Dans ce cas, les deux polarisations selon \vec{e}_x ou \vec{e}_y ne sont plus équivalentes pour le champ \vec{E} . On distingue deux cas : si l'onde est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (donc selon \vec{e}_y) et parallèlement au plan d'incidence (selon \vec{e}_x).



Attention, les adjectifs « normale » et « tangentielle » faisaient référence aux composantes du champ par rapport à l'interface. Dans la suite, cette dénomination n'est plus pratique, puisqu'un champ oblique n'est ni normal ni tangent. On qualifiera les composantes parallèle et perpendiculaire par rapport au **plan d'incidence**.

On suppose le champ incident \vec{E} polarisé selon \vec{e}_y comme sur la figure 4.4 : l'onde est polarisée orthogonalement au plan d'incidence et on note donc $\vec{E}_{0i} = E_{0i}\vec{e}_y$. On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude par respectivement $r_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$ et $t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$.

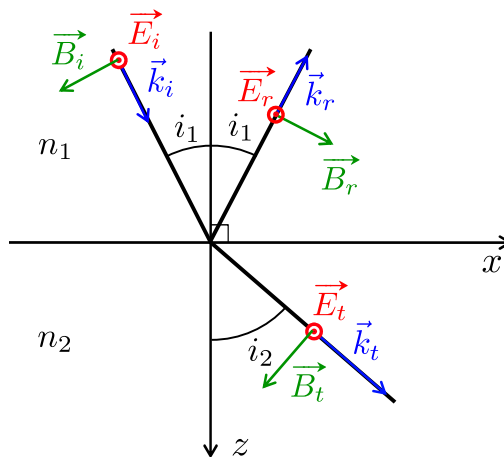


FIGURE 4.4 – Onde incidente polarisée orthogonalement au plan d'incidence : structure des ondes incidente, réfléchi et transmise

Le vecteur d'onde de l'onde incidente peut s'écrire $\vec{k}_i = \frac{n_1\omega}{c}(\sin i_1\vec{e}_x + \cos i_1\vec{e}_z)$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \vec{e}_y \\ \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1 E_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} (-\cos i_1 \vec{e}_x + \sin i_1 \vec{e}_z) \end{cases} \quad (4.33)$$

Expression des champs incident, réfléchi et transmis Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie s'écrit donc, d'après les lois de Descartes : $\vec{k}_r = \frac{n_1\omega}{c} (\sin i_1 \vec{e}_x - \cos i_1 \vec{e}_z)$. On peut montrer que le champ réfléchi est polarisé selon \vec{e}_y . On a donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = r_{\perp} E_{0i} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{r_{\perp} n_1 E_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} (\cos i_1 \vec{e}_x + \sin i_1 \vec{e}_z). \end{cases} \quad (4.34)$$

Le vecteur d'onde de l'onde transmise s'écrit $\vec{k}_t = \frac{n_2\omega}{c} (\sin i_2 \vec{e}_x + \cos i_2 \vec{e}_z)$. On peut montrer que le champ réfléchi est polarisé selon \vec{e}_y . On a donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = t_{\perp} E_{0i} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \vec{e}_y \\ \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{t_{\perp} n_2 E_{0i}}{c} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} (-\cos i_2 \vec{e}_x + \sin i_2 \vec{e}_z) \end{cases} \quad (4.35)$$

Conditions aux limites La continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{B} donne deux équations :

$$\begin{cases} 1 + r_{\perp} = t_{\perp} \\ n_1(r_{\perp} - 1) \cos i_1 = -n_2 t_{\perp} \cos i_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

En inversant le système de deux équations à deux inconnues, on en déduit les expressions de r_{\perp} et t_{\perp} :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad \text{et} \quad t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \quad (4.37)$$

Ces formules peuvent également se réécrire, en utilisant les formules de Descartes :

$$r_{\perp} = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \quad \text{et} \quad t_{\perp} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_2 + i_1)}. \quad (4.38)$$

On peut tracer les courbes r_{\perp} et t_{\perp} en fonction de l'angle d'incidence i_1 . Il est d'ailleurs intéressant de tracer r_{\perp} pour les deux cas $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$, puisque son signe change (cf. figure 4.5).

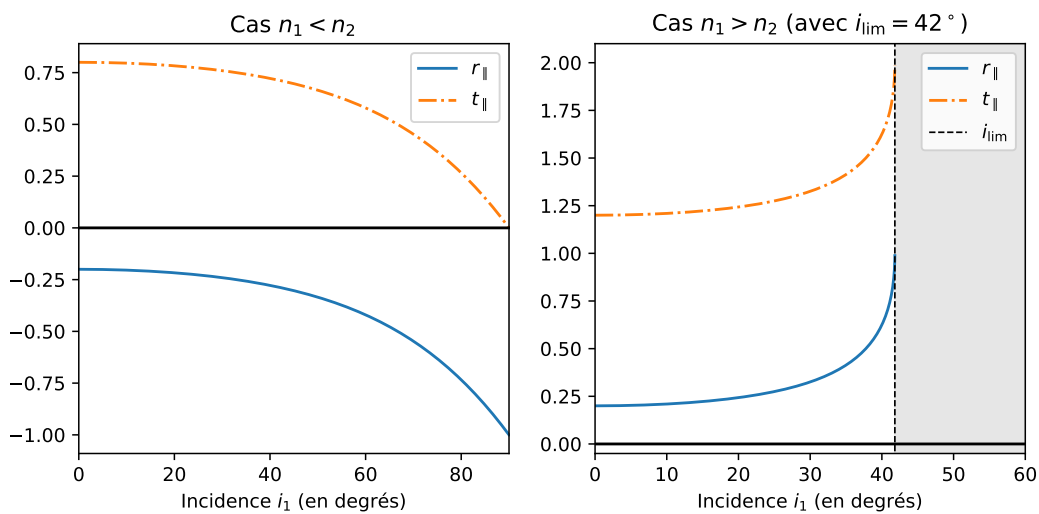
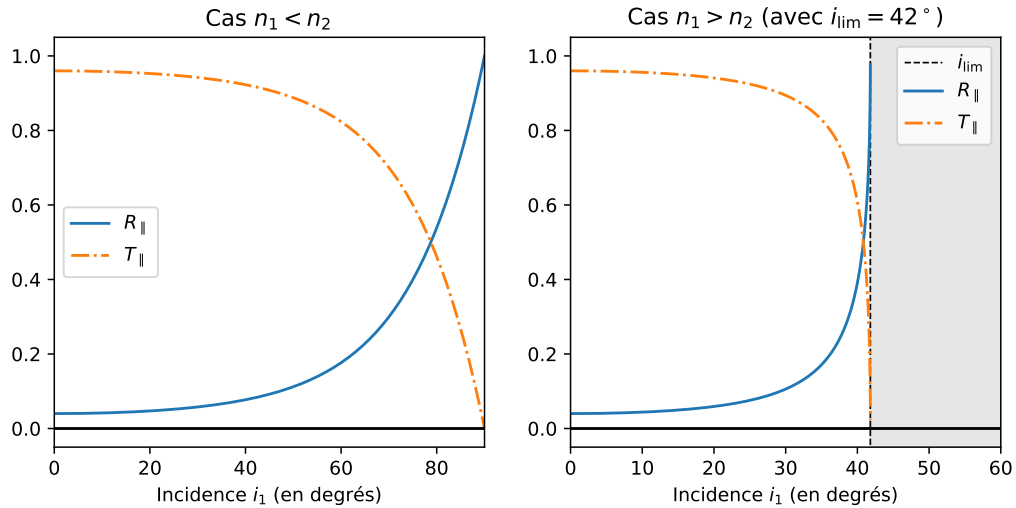


FIGURE 4.5 – Coefficients r_{\perp} et t_{\perp} en fonction de i_1 pour (a) $n_1 < n_2$ et (b) $n_1 > n_2$

Les coefficients de réflexion et transmission en *énergie* sont tracés sur la figure 4.6.

FIGURE 4.6 – Coefficients R_{\perp} et T_{\perp} en fonction de i_1 pour (a) $n_1 < n_2$ et (b) $n_1 > n_2$

5.3 Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence

On suppose le champ incident \vec{E}_i polarisé dans le plan d'incidence comme sur la figure 4.7 ; le vecteur d'onde de l'onde incidente s'écrit $\vec{k}_i = \frac{n_1\omega}{c}(\sin i_1\vec{e}_x + \cos i_1\vec{e}_z)$.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission par respectivement $r_{\parallel} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$ et $t_{\parallel} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$.

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} (\cos i_1 \vec{e}_x - \sin i_1 \vec{e}_z) \\ \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1 E_0}{c} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \vec{e}_y. \end{cases} \quad (4.39)$$

Le vecteur \vec{E}_i est parallèle au plan d'incidence, le vecteur \vec{B}_i est orthogonal au plan d'incidence : le plan d'incidence est un plan de symétrie. Par conséquent, les vecteurs \vec{E}_r et \vec{E}_t sont parallèles au plan d'incidence, et les vecteurs \vec{B}_r et \vec{B}_t sont orthogonaux au plan d'incidence. On choisira de noter positivement les amplitudes réelles des champs lorsqu'ils sont orientés selon la figure ci-dessous :

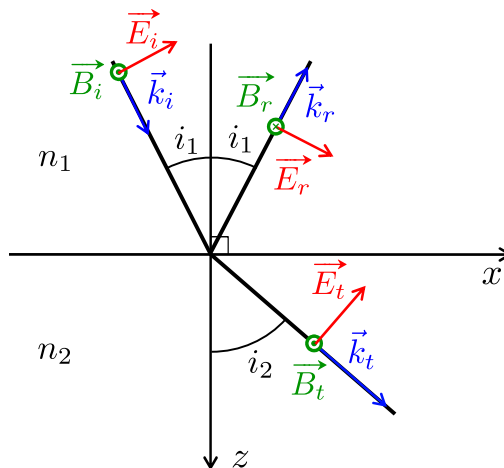


FIGURE 4.7 – Onde incidente polarisée parallèlement au plan d'incidence : structure des ondes incidente, réfléchie et transmise

Expression des champs incident, réfléchi et transmis Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie s'écrit donc, d'après les lois de Descartes : $\vec{k}_r = \frac{n_1\omega}{c}(\sin i_1\vec{e}_x - \cos i_1\vec{e}_z)$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = r_{\parallel} E_0 e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} (\cos i_1 \vec{e}_x + \sin i_1 \vec{e}_z) \\ \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{r_{\parallel} n_1 E_0}{c} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \vec{e}_y \end{cases} \quad (4.40)$$

Le vecteur d'onde de l'onde transmise s'écrit $\vec{k}_t = \frac{n_2 \omega}{c} (\sin i_2 \vec{e}_x + \cos i_2 \vec{e}_z)$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = t_{\parallel} E_0 e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} (\cos i_2 \vec{e}_x - \sin i_2 \vec{e}_z) \\ \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{t_{\parallel} n_2 E_0}{c} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \vec{e}_y \end{cases} \quad (4.41)$$

Conditions aux limites La continuité des composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{B} donne deux équations :

$$\begin{cases} \cos i_1 (1 + r_{\parallel}) = \cos i_2 t_{\parallel} \\ n_1 (1 - r_{\parallel}) = n_2 t_{\parallel} \end{cases} \quad (4.42)$$

En inversant le système de deux équations à deux inconnues, on en déduit les expressions de r_{\parallel} et t_{\parallel} :

$$\underline{r_{\parallel}} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \quad \text{et} \quad \underline{t_{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}. \quad (4.43)$$

formules qui peuvent également se réécrire, en utilisant les formules de Descartes :

$$\underline{r_{\parallel}} = \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)} \quad \text{et} \quad \underline{t_{\parallel}} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_2 + i_1) \cos(i_2 - i_1)}. \quad (4.44)$$

Sur la figure 4.8 sont tracées les courbes r_{\parallel} et t_{\parallel} en fonction de l'angle d'incidence i_1 dans les deux cas $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$. t_{\parallel} est toujours réel positif, alors que r_{\parallel} est un réel dont le signe dépend de l'angle d'incidence. L'onde réfléchie est soit en phase soit en déphasage de π avec l'onde incidente. On voit sur la figure que ce déphasage est lié aux valeurs respectives de n_1 et n_2 ainsi qu'au signe de $i_1 - i_B$.

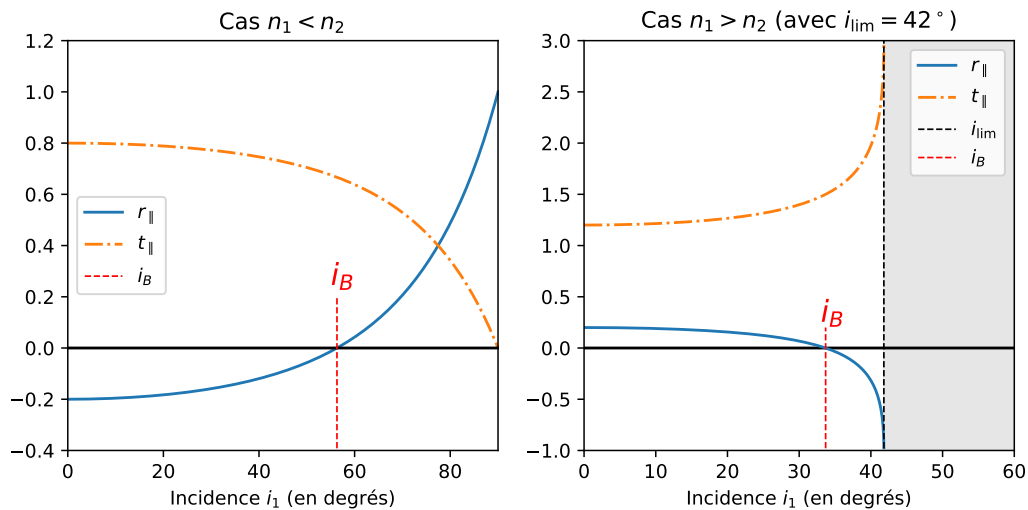


FIGURE 4.8 – Coefficients r_{\parallel} et t_{\parallel} en fonction de i_1 pour (a) $n_1 < n_2$ et (b) $n_1 > n_2$

Incidence de Brewster

Le coefficient de réflexion r_{\parallel} peut s'annuler pour un angle d'incidence appelé **angle de Brewster** i_B , ce qui signifie que l'onde est intégralement transmise. Cette incidence correspond à $\tan(i_1 + i_2) \rightarrow \infty$, donc à $i_B = \frac{\pi}{2} - i_2$. Si on réécrit la loi de Descartes, $n_1 \sin i_B = n_2 \sin i_2 = n_2 \cos i_B$. Finalement, l'angle de

Brewster est donné par

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.45)$$

Ce résultat peut être utilisé pour polariser la lumière par réflexion : quelle que soit la lumière incidente, la lumière réfléchie sera polarisée orthogonalement au plan d'incidence.

Interprétation de l'angle de Brewster Il est intéressant de remarquer que le coefficient de réflexion peut s'annuler pour une polarisation parallèle, mais pas une polarisation perpendiculaire. C'est donc une façon de différencier les polarisations, et concrètement une façon de polariser la lumière. C'est particulièrement frappant lorsque vous regardez une surface plane en été (goudron, flaque d'eau, pare-brise, etc.) avec des lunettes polarisées. Une légère inclinaison de la tête (et donc des axes passants des polariseurs) montre que la lumière réfléchie par un diélectrique est fortement polarisée !

Il est possible de comprendre l'absence de réflexion pour cet angle particulier en utilisant les résultats du chapitre 2. En effet, un champ électrique incident va exciter les molécules du diélectrique pour en faire des dipôles oscillants, qui vont réémettre le rayonnement. Or un dipôle n'émet aucune onde dans sa direction d'excitation. Cet angle de Brewster correspond à un angle d'incidence tel que le champ électrique dans le milieu est aligné avec l'angle de réflexion de l'onde.

Les coefficients de réflexion et transmission en *énergie* correspondants sont tracés sur la figure 4.9.

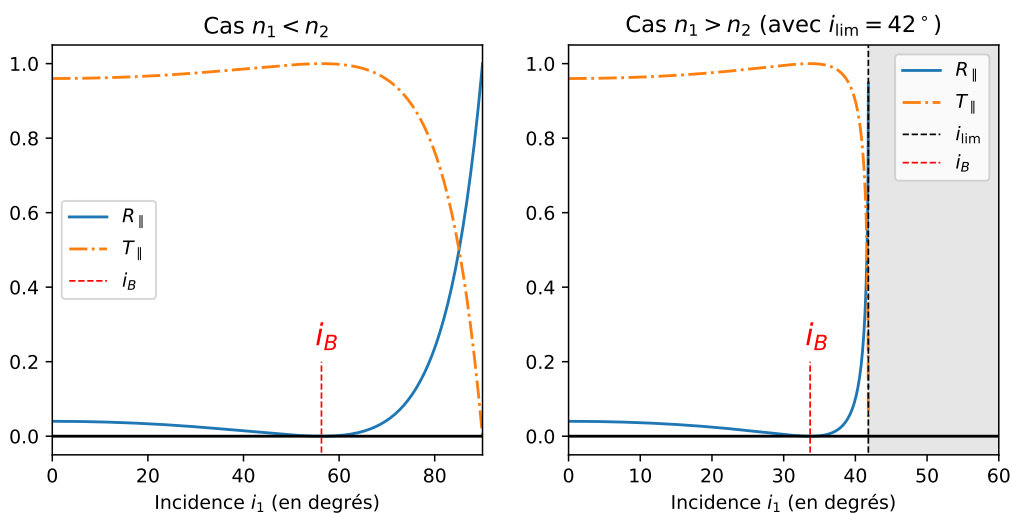


FIGURE 4.9 – Coefficients R_{\parallel} et T_{\parallel} en fonction de i_1 pour (a) $n_1 < n_2$ et (b) $n_1 > n_2$

5.4 Réflexion totale

Il y a un cas que nous avons mis de côté, car interdit par l'optique géométrique : lorsque $n_1 > n_2$, l'onde réfractée s'éloigne de la normale, et il existe un angle limite pour lequel l'optique géométrique ne donne plus de solution pour la réfraction. En effet, la solution i_2 à l'équation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ n'existe que si

$$i_1 < i_{1\ell} = \text{asin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sin i_{1\ell} = \frac{n_2}{n_1}}. \quad (4.46)$$

Mais si l'optique géométrique ne donne pas de solution pour $i_1 > i_{1\ell}$, l'électromagnétisme n'a pas dit son dernier mot !

Revenons au calcul du vecteur d'onde transmis : la composante tangentielle de \vec{k}_t est continue, donc

$$k_{tx} = k_{ix} = \frac{n_1 \omega}{c} \sin i_1. \quad (4.47)$$

De plus, l'équation d'onde appliquée aux ondes planes donne

$$\vec{k}_t \cdot \vec{k}_t = \left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2. \quad (4.48)$$

En particulier, on peut écrire la composante k_{tz} du vecteur d'onde :

$$k_{tz}^2 = \vec{k}_t \cdot \vec{k}_t - k_{tx}^2 = \left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_1 \omega}{c} \sin i_1\right)^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} (\sin^2 i_{1\ell} - \sin^2 i_1). \quad (4.49)$$

Dans le cas $i_1 > i_{1\ell}$, on a alors $k_{tz}^2 < 0$, donc $k_{tz} = ik''$ imaginaire pur ! Le vecteur d'onde s'écrit donc

$$\vec{k}_t = \frac{n_1 \omega}{c} \sin i_1 \vec{e}_x + ik'' \vec{e}_z. \quad (4.50)$$

L'amplitude de l'onde s'écrit alors :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(k_{tx}x + k_{tz}z)} = \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-k''z} e^{ik_{tx}x}. \quad (4.51)$$

L'amplitude du champ électrique décroît exponentiellement dans la direction Oz , tout en se propageant selon \vec{e}_x . Il s'agit donc d'une **onde évanescente** selon l'axe Oz , et une onde progressive selon Ox . La décroissance exponentielle fait apparaître une longueur caractéristique, que l'on appelle profondeur de pénétration δ :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{c}{\omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}}. \quad (4.52)$$

Cette décroissance exponentielle explique que l'onde ne puisse pas être détectée à une profondeur trop importante. Cette propriété fait penser à l'effet de peau dans un conducteur, mais il y a une grosse différence : dans cette situation, il n'y a aucune absorption d'énergie par le milieu. La dépendance en fréquence est également différente.

Propagation de l'énergie Reprenons l'expression de la moyenne du vecteur de Poynting pour une OPPH :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2\mu_0\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{k}}{k} \right). \quad (4.53)$$

La puissance se propage donc dans la direction de $\operatorname{Re} \left(\frac{\vec{k}}{k} \right)$. Ici, la composante k_{tz} étant imaginaire pure, on en déduit que $\langle \vec{\Pi} \rangle$ est selon \vec{e}_x , donc parallèle à l'interface ! Le coefficient de transmission en énergie étant un produit scalaire avec la normale, on obtient $T = 0$.

Le microscope TIRF Une application de ce phénomène est le microscope à ondes évanescentes, ou microscope à réflexion totale interne (TIRF), qui utilise la faible profondeur de pénétration de l'onde évanescente pour exciter sélectivement les fluorophores très proches de l'interface optique. Cela permet d'éliminer la fluorescence provenant des zones plus éloignées de l'interface et d'améliorer ainsi le contraste et le rapport signal à bruit en comparaison avec l'imagerie conventionnelle à champ large et même l'imagerie confocale, dès lors qu'on ne s'intéresse qu'à des objets disposés dans un plan placé à proximité de l'interface sur laquelle il y a réflexion totale (objets sur une membrane par exemple).

Réflexion totale frustrée Pour mettre en évidence cette onde évanescente, qui ne transporte pas d'énergie, on peut approcher un second dioptre parallèlement au premier dioptre au niveau duquel se faisait la réflexion totale. On observe alors qu'une partie de l'onde incidente émerge du second dioptre (en transportant cette fois-ci de l'énergie). On parle de **réflexion totale frustrée**.

Conclusions sur la réflexion oblique d'une onde à l'interface de deux diélectriques

- Dans les deux cas, si $n_1 > n_2$ on observe le phénomène de réflexion totale : l'angle i_1 ne peut prendre des valeurs que dans l'intervalle $[0; i_{1\ell}]$.
- Si $i_1 > i_{1\ell}$ dans le cas $n_1 > n_2$, l'onde est évanescente dans la direction de la normale, et se propage parallèlement à l'interface. Dans la direction de la normale, elle pénètre sur une distance caractéristique qui dépend de l'angle d'entrée et de la fréquence.
- **Onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence** : la réflexion et la transmission dépendent de l'angle d'entrée i_1 . La fonction R_{\perp} est monotone et croît rapidement vers 1 sans jamais s'annuler avant $\pi/2$ ou l'angle limite $i_{1\ell}$.
- **Onde polarisée parallèlement au plan d'incidence** : la réflexion et la transmission dépendent de l'angle d'entrée i_1 , mais beaucoup plus lentement que dans l'autre cas : T_{\parallel} reste longtemps proche de 1. Le coefficient de réflexion R n'est pas monotone et s'annule pour un angle donné : c'est l'incidence de Brewster.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les définitions des coefficients de réflexion et transmission en amplitude et en énergie.
- ✓ Mettre à profit les relations de passage des champs aux interfaces.
- ✓ Retrouver les relations de Fresnel en incidence normale.
- ✓ Justifier qualitativement l'existence de l'incidence de Brewster.

6 Propagation guidée

La propagation libre des ondes est très utilisée technologiquement (par exemple la 3G, 4G, Wifi, Bluetooth, radio, etc.) mais si cela permet de toucher de nombreux usagers, cela nécessite une antenne qui émet beaucoup d'énergie puisque la puissance surfacique décroît en $1/r^2$, avec un mauvais rendement global (la majorité des ondes émises ne sera pas utilisée).

Pour ces raisons, nous avons développé en parallèle des moyens de transport d'énergie *via* des guides. On peut penser au télégraphe, au téléphone, aux câbles bifilaires transportant l'électricité. La majeure partie de l'information sur internet est transportée par des fibres optiques qui sillonnent le monde.²

Il est possible de guider des ondes électromagnétiques à toute fréquence, on va cependant utiliser des guides adaptés selon les fréquences d'intérêt :

$f < \text{MHz}$ Les ondes de très basses fréquences se propagent très bien par des lignes bifilaires (deux fils conducteurs simples). C'est ce qu'on utilise en TP, ou de façon beaucoup plus industrielle par EDF.

$f < \text{GHz}$ Lorsque les fréquences augmentent, on évite les lignes bifilaires puisqu'elles ont tendance à rayonner de l'énergie. On utilise des câbles coaxiaux qui isolent très bien l'intérieur de l'extérieur grâce à un effet cage de Faraday.

$f < \text{THz}$ Si les fréquences continuent à monter, l'effet de peau va empêcher le transport d'onde dans des conducteurs. On utilise alors des guides d'onde métallique, typiquement pour les ondes centimétriques.

f **optiques** Pour les fréquences optiques ou infrarouges, certains milieux sont très adaptés pour guider les ondes : les diélectriques. Grâce à un effet de réflexion totale, il est possible de maintenir les rayons lumineux à l'intérieur d'un diélectrique. C'est le principe des fibres optiques.

Intéressons-nous aux propriétés d'ondes guidées. Pour ne pas complexifier l'étude, nous nous focaliserons sur les géométries simples.

2. Pour une carte détaillée des fibres optiques sous-marines, on peut se rendre sur

6.1 Onde guidée par deux plans conducteurs

On considère deux plans conducteurs –qu'on prendra comme des conducteurs parfaits– parallèles au plan yOz . Ils ont pour équation $x = 0$ et $x = a$. Le reste de l'espace est vide ($\epsilon_r = 1$). On s'intéresse à la possibilité de propager une onde électromagnétique selon la direction z .

Dans le vide une OPPH peut se propager selon deux polarisations perpendiculaires de manière identique (en l'occurrence selon \vec{e}_x et \vec{e}_y si l'onde se propage selon z). Ici, la présence des plans conducteurs va briser cette symétrie.

6.1.1 Conditions aux limites

La présence des plans conducteurs impose des conditions aux limites pour les champs électrique et magnétique. En effet, dans un conducteur parfait on a nécessairement $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$.³

De plus, on a démontré dans le chapitre 4 que les champs vérifiaient des relations de passage à une interface, en particulier le champ électrique parallèle à l'interface et le champ magnétique normal sont continus.

Ainsi, dans la situation étudiée, on en déduit nécessairement que

$$\begin{aligned} E_z(x=0) = E_z(x=a) = E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0 \\ B_x(x=0) = B_x(x=a) = 0 \end{aligned}$$

Les autres composantes sont discontinues, elles n'imposent pas de contraintes particulières sur les champs.

6.1.2 Onde TEM

Intéressons-nous à un champ électrique polarisé selon \vec{e}_x . Le champ

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)}$$

peut-il se propager dans le guide d'onde ?

Le choix d'une polarisation selon \vec{e}_x fait qu'il n'y a pas de contrainte due au guide d'onde. Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert habituelle, donc la relation de dispersion est $k = \frac{\omega}{c}$. On retrouve la relation habituelle du vide, et le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \text{rot } \vec{E} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$$

On retrouve une onde se propageant à $v_\phi = c$, dont les champs électrique et magnétique sont transverses. Cette onde est alors appelée onde TEM.

6.1.3 Onde TE

De la même façon, on s'intéresse à la polarisation selon \vec{e}_y du champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}.$$

Dans le vide, les deux polarisations sont équivalentes. Ici cependant, les conditions aux limites imposent $E_y(x=0) = 0 = E_y(x=a) = 0$. Il n'est donc pas possible d'avoir une amplitude E_0 uniforme pour la composante E_y , elle doit *a minima* dépendre de x . On est amené à considérer une OPPH **non homogène**, c'est-à-dire

$$\vec{E} = E_0(x) \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}.$$

3. *Stricto sensu*, il peut exister un champ magnétique constant dans un conducteur. Cependant on s'intéresse ici aux phénomènes propagatifs donc variables dans le temps, le cas d'un champ constant n'est pas pertinent dans notre situation.

Ce champ entre les deux plans conducteurs vérifie l'équation de d'Alembert, cependant attention de ne pas remplacer $\Delta \rightarrow -\vec{k}^2$ puisque l'onde n'est pas homogène. En effet, l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial t^2} - \Delta \underline{E}_y = 0$$

se développe en

$$-\frac{\omega^2}{c^2} E_0 - \frac{d^2 E_0}{dx^2} + \vec{k}^2 E_0 = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} + (k_0^2 - k^2) E_0 = 0$$

avec $k_0 = \omega/c$ est le vecteur d'onde dans le vide. Appelons $\kappa^2 = k_0^2 - k^2$. On a alors deux situations différentes :

Cas $\kappa^2 < 0$ Dans ce cas $E_0(x) = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}$ avec $\gamma = \sqrt{-\kappa^2}$. Si on cherche à vérifier les conditions aux limites, on trouve $A = B = 0$. Ce champ ne se propage pas dans le guide.

Cas $\kappa^2 > 0$ Dans cette situation les solutions sont celles d'un oscillateur harmonique

$$E_0(x) = C \cos(\kappa x) + D \sin(\kappa x).$$

La condition $E_y(x=0) = 0$ impose $C = 0$. Et la seconde condition impose

$$D \sin(\kappa a) = 0.$$

Si on exclut le cas trivial $D = 0$, on se retrouve avec une condition de quantification sur κ : il doit s'écrire

$$\kappa_n = n_x \frac{\pi}{a}, \quad n_x \in \mathbb{Z}^*.$$

Le cas $n_x = 0$ est interdit, parce que cela signifierait que $k_0^2 = k^2$, et donc d'après l'équation de propagation E_0 serait une fonction affine. Les conditions aux limites imposeraient à cette fonction d'être nulle.

La relation de dispersion s'écrit finalement

$$\boxed{k_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n_x^2 \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (4.54)$$

avec le champ électrique

$$\vec{\underline{E}} = E_0 \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \vec{e}_y e^{i(k_n z - \omega t)}.$$

Propriétés de la relation de dispersion

- On cherche $k \in \mathbb{R}$, donc $k^2 > 0$. Comme $n_x \neq 0$, cela impose une borne minimale pour la fréquence, dans le cas le moins contraignant $n_x^2 = 1$: $\omega > \pi c/a$, ce qu'on peut réinterpréter en fonction de la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega}$:

$$\boxed{\lambda_0 < 2a}.$$

Le guide d'onde est un filtre passe-haut en fréquence (ou de façon équivalente passe-bas en longueur d'onde).

- À une fréquence ou pulsation donnée, il peut exister plusieurs vecteurs d'onde k_n pour lesquels l'onde pourra se propager dans le guide. Ces différents k_n sont quantifiés par un indice entier n_x , on les appelle les *modes* de propagation.

- La relation de dispersion pour la propagation de l'onde est *dispersive*, même si l'onde se propage dans le vide. En effet, la vitesse de phase dépend de la pulsation :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{1}{\sqrt{1 - n_x^2 \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}.$$

On remarque au passage que cette vitesse de phase est supérieure à c !

- Enfin, calculons le champ magnétique associé :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{i\omega} \text{rot } \vec{E} = \frac{1}{i\omega} \left[-\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{e}_z \right] \\ &= \left[-\frac{k_n}{\omega} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \vec{e}_x - i \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \vec{e}_z \right] E_0 e^{i(k_n z - \omega t)}. \end{aligned}$$

Ce champ magnétique a une composante selon \vec{e}_z la direction de propagation de l'onde : le champ \vec{B} n'est pas transverse ! Cette onde n'est pas une TEM, mais uniquement TE.

Propagation guidée entre deux plans

On retiendra donc :

- il existe une polarisation telle que l'onde se propage comme dans le vide à la vitesse $v_\phi = c$, l'onde est transverse électrique et magnétique (TEM).
- pour une autre polarisation, les conditions aux limites imposent une onde non-homogène. Cela apporte plusieurs nouveautés : un effet passe-haut en fréquences, des modes de propagation propres au guide, une propagation dispersive même dans le vide, un champ magnétique qui n'est plus transverse (on parle d'onde TE).

6.2 Guide à section rectangulaire

Considérons maintenant un guide réel, qui contraint les champs dans les deux directions transverses à la direction de propagation, comme schématisé sur la figure 4.10.

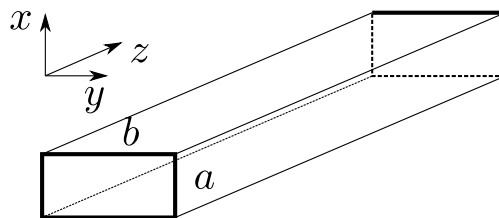


FIGURE 4.10 – Schéma d'un guide d'onde rectangulaire

Les conditions aux limites sur la composante tangentielle de \vec{E} imposent :

$$E_y(x=0) = E_z(x=0) = E_y(x=a) = E_z(x=a) = 0 \quad (4.55)$$

$$E_x(y=0) = E_z(y=0) = E_y(y=b) = E_z(y=b) = 0 \quad (4.56)$$

Toutes les composantes de \vec{E} et en particulier les composantes E_x et E_y ont des conditions imposées. On en déduit qu'il n'est pas possible d'avoir une onde plane **homogène** qui se propage dans le guide, on est obligé d'avoir $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$.

Pour fixer les idées, cherchons si un champ électrique \vec{E} polarisé selon \vec{e}_y peut se propager : $\vec{E} = E_0(x) \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$. L'équation de d'Alembert appliquée au champ s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0} \implies \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) E_0 - \frac{d^2 E_0}{dx^2} = 0.$$

Mais contrairement au cas de la section précédente, où il est possible d'avoir $k^2 = \omega^2/c^2$, ici une telle relation impliquerait que E_0 est une fonction affine de x , et ne pourrait donc pas vérifier les deux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$. Donc on se ramène au cas de l'onde TE tout à l'heure, où $E_0(x)$ est une fonction sinusoïdale. Par le même raisonnement, on trouve que \vec{B} n'est pas un champ transverse. Si on avait choisi \vec{E} polarisé selon \vec{e}_x , le résultat aurait été le même.

Dans un guide d'onde rectangulaire il n'existe pas de mode de propagation qui soit à la fois transverse électrique et magnétique (TEM).

On a trouvé des modes TE. Il existe aussi des modes TM où le champ \vec{B} est transverse, mais pas le champ \vec{E} .

Propagation dans un guide rectangulaire

On retiendra donc :

- contrairement au cas d'une propagation entre deux plans, il n'existe pas de mode TEM dans un guide rectangulaire. Il existe en revanche des modes TE et TM.
- les ondes se propagent de façon non-homogène, avec les mêmes résultats que dans le cas de deux plans, à savoir des quantifications, cette fois selon x et y . On note typiquement un mode TE : $TE_{n,m}$.

6.3 Propagation dans une fibre optique

À venir

7 Annexe : démonstration des relations de passage (★)

7.1 Composante normale du champ électrique

Au voisinage de deux points M_1 et M_2 infiniment proches et placés de part et d'autre d'une nappe de courants et de charges surfaciques, on peut assimiler la surface portant les charges à son plan tangent. On peut alors adopter le système de coordonnées cartésiennes et noter $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$.

Nous allons utiliser le théorème de Gauss pour lier les composantes normales du champ \vec{E} des deux côtés de l'interface : $E_{n,1}$ et $E_{n,2}$. On choisit pour cela comme surface fermée un cylindre d'axe $(M_1 M_2)$, orthogonal à la surface, de rayon R et de hauteur h . Ce cylindre est infiniment petit. On souhaite notamment pouvoir négliger les variations de \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et σ sur la section de ce cylindre. Pour mettre en évidence que le rayon de ce cylindre est petit, on le notera $R = R_0 \epsilon$ (ϵ étant infiniment petit). De plus, on posera $h = h_0 \epsilon^2$ (h est alors un infiniment petit d'ordre deux alors que R était un infiniment petit d'ordre un). On a choisi R et h de façon à pouvoir faire tendre la hauteur du cylindre et sa section vers 0 « à la même vitesse », c'est-à-dire que lorsque ϵ tend vers 0, $\frac{h}{\pi R^2}$ reste constant (voir figure 4.11).

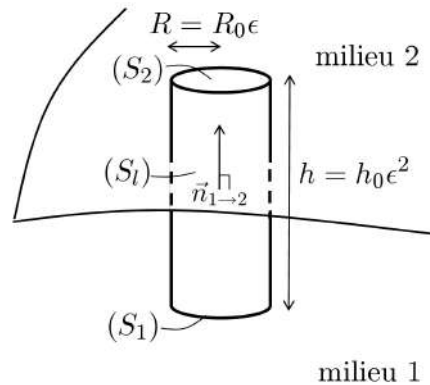


FIGURE 4.11 – Choix de la surface de Gauss pour démontrer la relation de passage de la composante normale du champ électrique

Appliquons le théorème de Gauss à cette surface fermée (S) :

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} \quad (4.57)$$

Soit, en utilisant $(S) = (S_1) \cup (S_2) \cup (S_\ell)$ et en notant $\phi_{(S_\ell)}$ le flux de \vec{E} à travers la surface latérale (S_ℓ) :

$$\iint_{(S_2)} n_2^2 \epsilon_0 \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(S_1)} n_1^2 \epsilon_0 \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_1 + \phi_{(S_\ell)} = Q_{\text{int}}. \quad (4.58)$$

Les vecteurs surface élémentaires étant orientés vers l'extérieur de la surface fermée, $d\vec{S}_2 = dS \vec{e}_z$ et $d\vec{S}_1 = -dS \vec{e}_z$. Alors

$$\iint_{(S_2)} n_2^2 \epsilon_0 E_z(M) dS - \iint_{(S_1)} n_1^2 \epsilon_0 E_z(M) dS + \phi_{(S_\ell)} = \iint_{(S)} \sigma(M) dS \quad (4.59)$$

On a choisi ϵ suffisamment petit pour pouvoir considérer $E_z(M) \approx E_z(M_2)$ sur la surface (S_2) , $E_z(M) \approx E_z(M_1)$ sur la surface (S_1) et $\sigma(M) \approx \sigma$ à l'intérieur de la surface de Gauss. On obtient donc :

$$n_2^2 \epsilon_0 E_z(M_2) \pi R_0^2 \epsilon^2 - n_1^2 \epsilon_0 E_z(M_1) \pi R_0^2 \epsilon^2 + \phi_{(S_\ell)} = \sigma \pi R_0^2 \epsilon^2 \quad (4.60)$$

c'est-à-dire

$$n_2^2 E_z(M_2) - n_1^2 E_z(M_1) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\phi_{(S_\ell)}}{\pi R_0^2 \epsilon^2 \epsilon_0}. \quad (4.61)$$

Or le flux latéral est majoré :

$$|\phi_{(S_\ell)}| = \left| \iint_{(S_\ell)} \vec{D}(M) \cdot d\vec{S}_\ell \right| \leq \iint_{(S_\ell)} |\vec{D} \cdot d\vec{S}_\ell| \leq \iint_{(S_\ell)} \|\vec{D}\| dS_\ell \quad (4.62)$$

Si on note maintenant D_{\max} le maximum de la norme de \vec{D} sur la surface latérale du cylindre, on obtient :

$$|\phi_{(S_\ell)}| \leq D_{\max} 2\pi R_0 h_0 \epsilon^3 \quad (4.63)$$

On obtient donc l'inégalité suivante :

$$\left| n_2^2 E_z(M_2) - n_1^2 E_z(M_1) - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right| = D_{\max} \frac{2h_0}{R_0 \epsilon_0} \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.64)$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient alors l'égalité suivante :

$$n_2^2 E_z(M_2) - n_1^2 E_z(M_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.65)$$

À la traversée d'une nappe chargée en surface, la composante normale du champ électrique est discontinue.

7.2 Composante normale du champ magnétique

Le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la même surface fermée cylindrique (S) étant nul, on peut montrer par un même raisonnement que :

$$B_z(M_2) - B_z(M_1) = 0 \quad (4.66)$$

À la traversée d'une interface, la composante normale du champ magnétique est toujours continue.

7.3 Composante tangentielle du champ magnétique

Cette fois-ci, on utilise le théorème d'Ampère pour relier les composantes tangentielles du champ \vec{H} au voisinage de l'interface.

On choisit pour contour d'Ampère fermé orienté le rectangle de longueur ℓ et de hauteur h , comme indiqué sur la figure 4.12, avec ℓ un infiniment petit d'ordre un ($\ell = \ell_0 \epsilon$) et h un infiniment petit d'ordre deux ($h = h_0 \epsilon^2$).

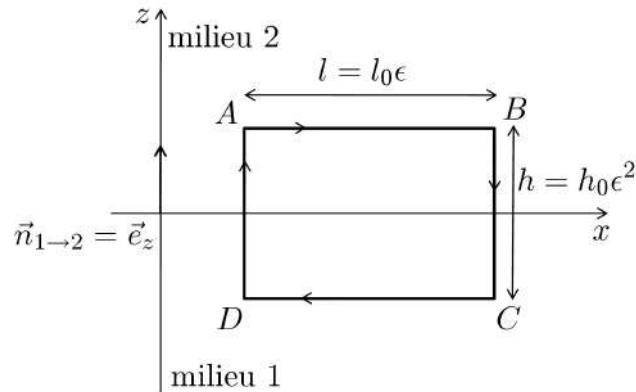


FIGURE 4.12 – Contour d'Ampère permettant de trouver la relation de passage pour la composante tangentielle du champ magnétique

On applique le théorème d'Ampère à ce contour fermé orienté (Γ) = (ABCD) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (4.67)$$

Circulation de H Le calcul de la circulation de \vec{H} le long du chemin Γ peut se réécrire :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(AB)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(BC)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(CD)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(DA)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.68)$$

Si le rectangle est choisi suffisamment petit pour pouvoir assimiler $H_x(M)$ à la constante $H_x(M_2)$ sur le segment $[AB]$:

$$\int_{(AB)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_A}^{x_B} H_x(M) dx = H_x(M_2)(x_B - x_A) = H_x(M_2)\ell_0 \epsilon \quad (4.69)$$

Le même calcul peut être mené pour la circulation entre C et D :

$$\int_{(CD)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_C}^{x_D} H_x(M) dx = H_x(M_1)(x_D - x_C) = -H_x(M_1)\ell_0\epsilon \quad (4.70)$$

La circulation s'écrit finalement :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = (H_x(M_2) - H_x(M_1))\ell_0\epsilon + \int_{(BC)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(DA)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.71)$$

Flux du vecteur courant D'autre part, le flux de \vec{j} peut se réécrire :

$$\iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} j_y dz dx = \ell_0\epsilon \int_{-h_0\epsilon/2}^{h_0\epsilon/2} j_y dz \quad (4.72)$$

Ceci permet d'écrire, en utilisant le passage de la description volumique à la description surfacique et en faisant apparaître la densité de courant surfacique \vec{j}_s :

$$\iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \ell_0\epsilon j_{S,y}, \quad (4.73)$$

Théorème d'Ampère On a donc en écrivant le théorème d'Ampère

$$(H_x(M_2) - H_x(M_1)) - j_{S,y} = \frac{1}{\ell_0\epsilon} \left[\int_{(BC)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(DA)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.74)$$

Cherchons alors à majorer les deux premiers termes du membre de droite. Si on note H_{\max} le maximum de $\|\vec{H}\|$ sur l'ensemble des chemins (AD) et (BC) , on a :

$$\left| \int_{(BC)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_{(DA)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \right| \leq 2 \int H_{\max} d\ell = 2H_{\max}h_0\epsilon^2 \quad (4.75)$$

La dernière intégrale peut être majorée, en notant α le maximum de $\left\| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\|$ sur la surface rectangulaire :

$$\left| \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right| \leq \iint_{(S)} \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right| \leq \iint_{(S)} \alpha dS = \alpha\ell_0h_0\epsilon^3 \quad (4.76)$$

On obtient donc :

$$|(H_x(M_2) - H_x(M_1)) - j_{S,y}| \leq 2H_{\max}h_0\epsilon^2 + \alpha\ell_0h_0\epsilon^3 \quad (4.77)$$

On peut alors faire tendre ϵ vers 0, ce qui permet de conclure :

$$H_x(M_2) - H_x(M_1) = j_{S,y} = (\vec{j}_s \wedge \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x \quad (4.78)$$

En faisant le même travail avec un autre contour (Γ') dans le plan (\vec{e}_z, \vec{e}_y) de normale $-\vec{e}_x$, on obtiendrait :

$$H_y(M_2) - H_y(M_1) = -j_{S,x} = (\vec{j}_s \wedge \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_y \quad (4.79)$$

En présence de courants surfaciques, la composante tangentielle du champ \vec{H} est discontinue.

7.4 Composante tangentielle du champ électrique

En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday au même contour (Γ) , on obtiendrait que

$$E_x(M_2) - E_x(M_1) = 0 \quad (4.80)$$

Avec le contour (Γ') , on obtiendrait :

$$E_y(M_2) - E_y(M_1) = 0 \quad (4.81)$$

La composante tangentielle du champ électrique est continue au passage d'une interface.

Chapitre 5

Interférences lumineuses

Sommaire

1	Sources lumineuses et détecteurs en optique	110
1.1	Les types d'ondes utilisés en optique	110
1.2	Détecteurs de lumière et éclairage lumineux	110
1.3	Sources lumineuses et modèle du train d'onde	113
2	Conditions d'interférences et formule de Fresnel	116
2.1	Position du problème	117
2.2	Conditions d'interférences	118
2.3	Formule de Fresnel	119
2.4	Expression de la phase et différence de marche	119
2.5	Définitions et aspects expérimentaux	120
3	Obtenir deux sources cohérentes	122
3.1	Dispositifs interférentiels	122
3.2	Les trous d'Young	123
3.3	L'interféromètre de Michelson, un exemple de division d'amplitude	127
4	Au-delà de la source ponctuelle monochromatique	132
4.1	Influence de l'étendue spectrale de la source	132
4.2	Influence de l'étendue spatiale de la source : cas des trous d'Young	134
4.3	Influence de l'étendue spatiale de la source : cas de l'interféromètre de Michelson	137
5	L'interféromètre de Fabry-Pérot (*)	138
5.1	Étude de la fonction d'Airy	139
5.2	Utilisation de l'interféromètre de Fabry-Pérot comme filtre	140

Objectifs

Le phénomène d'interférence provient de la superposition de plusieurs ondes dites *cohérentes*. Il se rencontre dans de tous les phénomènes ondulatoires (ondes acoustiques, ondes à la surface de l'eau, ondes électromagnétiques, ondes de matière, etc.)

Dans ce chapitre, on se concentre sur les ondes électromagnétiques dans le domaine du visible. Nous introduisons la notion d'éclairage lumineux, la grandeur effectivement mesurée par des détecteurs. L'objectif sera ensuite de décrire les situations dans lesquelles il est possible d'observer des interférences lumineuses, et de mettre en avant pourquoi elles sont plus délicates à observer que dans le cas des ondes mécaniques. À cet effet, nous introduisons les notions de *cohérences temporelle et spatiale* des sources. Nous terminerons sur deux exemples classiques d'interférométries.

1 Sources lumineuses et détecteurs en optique

1.1 Les types d'ondes utilisés en optique

Onde rayonnée par un dipôle Le cas le plus réaliste d'onde émise est celle que nous avons mis en évidence dans le chapitre 2 : une onde issue de l'émission dipolaire. En effet la plupart des émetteurs d'ondes peuvent être assimilés à un dipôle. Le champ électromagnétique rayonné à grande distance par un dipôle s'écrit en notation complexe

$$\vec{E}(r, t) = \frac{A_0 \sin \theta}{r} e^{i(kr - \omega t + \varphi_0)} \vec{e}_\theta$$

où l'angle θ est défini par rapport à l'axe du dipôle.

Cependant, la description d'une onde lumineuse par une onde rayonnée par un dipôle n'est pas nécessaire. On s'intéresse le plus souvent à une assemblée d'atomes (comme une lampe), d'orientation dipolaire aléatoire, qui va gommer l'anisotropie de l'émission. De plus, on mettra de côté l'aspect vectoriel de l'onde. Les deux types d'ondes utilisées sont l'OPPH et l'onde sphérique.

Onde sphérique L'anisotropie spatiale de l'onde sera souvent négligée par la suite, puisqu'on regardera l'émission que dans un cône avec θ variant faiblement. On approxime ainsi souvent cette composante du champ électrique à une onde sphérique : onde scalaire correspondant à une émission isotrope à partir d'une source ponctuelle. En notation complexe, une onde sphérique \underline{s} s'écrit

$$\underline{s}(r, t) = \frac{A_0}{r} e^{i(kr - \omega t + \varphi_0)}$$

On utilisera ce type d'onde pour modéliser l'émission d'une source quasi-ponctuelle à une distance finie.

OPPH (ou OPPM) L'onde plane homogène progressive et monochromatique¹ est utilisée pour modéliser un faisceau parallèle de lumière. Comme nous l'avons largement décrit dans le chapitre 1, l'OPPH polarisée rectilignement s'écrit en notation complexe

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{u} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

où \vec{u} est le vecteur directeur de la polarisation de l'onde.

On notera deux différences importantes avec l'onde sphérique : l'amplitude ne varie pas en $1/r$ (ce qui implique que l'énergie d'une OPPH est infinie) et kr devient le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{r}$ dans le terme de phase.

Ce type d'onde est utilisé pour modéliser les sources ponctuelles situées à l'infini (soit très lointaines, soit amenées à l'infini grâce à une lentille convergente), ainsi qu'approximer les faisceaux laser (qui sont plus exactement des faisceaux gaussiens).

1.2 Détecteurs de lumière et éclairage lumineux

Lorsque deux ondes à la surface de l'eau se rencontrent, elles interfèrent. C'est quelque chose de « naturel » puisqu'on l'a déjà observé à plusieurs reprises. De même, deux haut-parleurs peuvent créer des interférences d'ondes sonores, c'est-à-dire des endroits où le son est nettement diminué ou augmenté, vous avez potentiellement pu l'expérimenter. Cependant, on ne rencontre jamais dans la vie courante deux lampes qui émettent des ondes électromagnétiques, qui lorsqu'elles sont allumées en même temps créent des zones d'absence de lumière ! Et pourtant les ondes se rencontrent et interfèrent, comme les ondes mécaniques. Ce paradoxe s'explique par deux spécificités de l'optique.

1. En optique, on utilise plus volontiers le terme « monochromatique » que celui d'« harmonique » qui fait plus référence à de l'acoustique. Les deux termes ont cependant la même signification : une unique fréquence.

Spécificités de l'optique

1. Grandeur détectée Il existe deux types de détecteurs lumineux : les détecteurs thermiques (la lumière va être absorbée et va chauffer une surface) et les détecteurs quantiques (qui utilisent l'effet photoélectrique, c'est-à-dire la conversion photon-électron). Si les processus de détection sont très différents pour les deux types de détecteurs, aucun n'est sensible au champ électrique ; ils détectent l'**énergie transportée** ou la puissance, c'est-à-dire au vecteur de Poynting, qui est par définition lié à la puissance surfacique électromagnétique.

2. Gamme de fréquences L'optique se limite généralement à la lumière, gamme du spectre électromagnétique qui va du proche infrarouge aux proches ultraviolets en passant par le visible ($\lambda \in [400; 800]$ nm). La fréquence de ces ondes est donc de l'ordre de 10^{15} Hz, soit une période de 10^{-15} s. Il s'agit de fréquences extrêmement grandes comparativement aux fréquences de la vie courante ! Nos photodétecteurs actuels (l'œil inclus) ne sont pas capables de suivre les oscillations du champ électrique ni du vecteur de Poynting.² Le tableau 5.1 donne des temps de réponse typiques. Ils mesurent en fait une grandeur réelle proportionnelle à la moyenne temporelle du carré du champ électrique, sur leur temps de réponse.

Flux électromagnétique Le vecteur de Poynting permet de quantifier la puissance surfacique électromagnétique émise par un rayonnement. Prenons le cas d'une OPPH dans un milieu L.H.I. électrique :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\omega \mu_0} \vec{k} = \frac{n \vec{E}^2}{c \mu_0} \vec{k}.$$

Cette puissance surfacique est proportionnelle au carré de la norme du champ électrique. Le **flux électromagnétique** est le flux de ce vecteur à travers la surface considérée. Autrement dit c'est la puissance reçue, qui se mesure en watts.

Grandeurs photométriques Cependant, si on prend le cas de l'œil, on sait que toutes les longueurs d'onde ne contribuent pas de la même façon à la sensation de lumière. Les longueurs d'onde proches de 500 nm sont très bien détectées, alors que les longueurs d'ondes avant 400 nm (UV) ou après 800 nm (IR) ne sont pas perçues par l'œil, et ne contribuent pas à la lumière. C'est aussi vrai pour les détecteurs quantiques, leur rendement de conversion dépend très fortement de la longueur d'onde de la lumière envoyée. Donc pour un même flux énergétique incident, le flux reçu par un photodétecteur peut être très différent.³

Définition

On définit le **flux lumineux** $\Phi_\ell(\lambda)$ à la longueur d'onde λ comme le produit :

$$\Phi_\ell = \eta(\lambda) \times \Phi_{em}(\lambda) \quad (5.1)$$

où $\eta(\lambda)$ est l'efficacité de détection de l'œil à cette longueur d'onde, et Φ_{em} le flux énergétique.

L'unité dans le système international du flux lumineux est le lumen. Il garde la même dimension physique que le flux électromagnétique, c'est-à-dire qu'il est homogène à une puissance.

Très souvent on s'intéresse plutôt au flux par unité de surface du détecteur qui est une grandeur intensive et ne dépend pas de la surface du détecteur.

Définition

On définit l'**éclairage lumineux** \mathcal{E} par

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_\ell}{dS} \quad (5.2)$$

2. La norme du vecteur de Poynting est une grandeur quadratique qui oscille à une fréquence double de celle du champ. Rappelons que $\cos^2 \omega t = (\cos 2\omega t + 1)/2$, donc une grandeur quadratique oscille à la fréquence double du champ.

3. De part leur processus de détection, les détecteurs thermiques sont nettement moins sensibles à la longueur d'onde, puisqu'ils détectent un échauffement. Leur réponse spectrale plate est souvent utilisée comme référence.

Son unité est le lux. L'éclairement est homogène à une puissance surfacique.

Ainsi, l'éclairement est proportionnel à la puissance surfacique moyennée dans le temps, c'est-à-dire à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting. La moyenne temporelle est prise sur le *temps de réponse* τ_D (ou *temps d'intégration*) du détecteur utilisé :

$$\mathcal{E} = \eta(\lambda) \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle_D = K \left\langle \left\| \vec{E}^2 \right\| \right\rangle_D \quad \text{où} \quad \langle a \rangle_D = \frac{1}{\tau_D} \int_t^{t+\tau_D} a(t') dt' \quad (5.3)$$

et $K = \eta(\lambda) \frac{n}{c\mu_0}$ est une constante.

Le tableau 5.1 présente des ordres de grandeur typiques de temps d'intégration. On remarque que ces temps sont très longs devant la période typique des ondes lumineuses. Même le détecteur le plus rapide connu à ce jour (la « Streak camera ») n'atteint « que » la picoseconde 10^{-12} s, ce qui revient à intégrer le signal sur au moins 1000 périodes d'oscillations du champ.

Détecteur	τ_d (s)
Œil	10^{-2}
Capteur CCD	10^{-4}
Photomultiplicateur	10^{-6}
Streak camera	10^{-12}

TABLE 5.1 – Temps de réponse de détecteurs optiques

Dans le cas d'une OPPH,

$$\mathcal{E} = K E_0^2 \left\langle \cos^2 \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0 \right) \right\rangle_D = K \frac{1}{2} E_0^2$$

où l'on a utilisé $\langle \cos^2 x \rangle = 1/2$. On peut également écrire plus rapidement en utilisant la notation complexe :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{Re} (K \underline{\vec{E}} \underline{\vec{E}}^*) = \frac{K}{2} \underline{E} \underline{E}^* = \frac{K}{2} E_0 E_0. \quad (5.4)$$

La constante K est inconnue (elle dépend de la sensibilité du détecteur), mais elle ne nous intéressera pas par la suite puisqu'on se concentrera sur des éclairagements *relatifs* dans ce cours. Nous allons donc l'éliminer du problème en lui donnant une valeur « qui nous arrange ». Vue l'expression précédente pour une OPPH, choisir $K = 2$ permettrait de compenser la valeur moyenne du $\cos^2(\omega t)$ qui vaut $1/2$. Nous choisirons donc cette convention par suite. On retiendra pour l'éclairement lumineux, avec l'expression réelle ou complexe du champ :

$$\boxed{\mathcal{E} = 2 \left\langle \left\| \vec{E}(t) \right\|^2 \right\rangle_D = \underline{E} \underline{E}^* .}$$

Remarque Les expressions données sont valables pour une onde dont l'amplitude est lentement variable par rapport au temps d'intégration du détecteur.

Remarque En photométrie, l'*intensité lumineuse* est une grandeur différente de l'éclairement : c'est le flux lumineux moyen par unité d'angle solide (et non par unité de surface). Cependant, on confondra ces deux notions par la suite du cours pour des raisons de simplicité, et on les utilisera de façon interchangeable.

Compétences à maîtriser

- ✓ Identifier les différences fondamentales entre le cas de l'optique et les ondes mécaniques
- ✓ Justifier que la quantité observée en optique est proportionnelle au champ au carré.

Un conseil de vidéo pour comprendre pourquoi le temps d'observation est crucial en optique : <https://youtu.be/ySte6NRuA-k>.

1.3 Sources lumineuses et modèle du train d'onde

1.3.1 Différentes sources lumineuses

Il existe différentes sources de lumière, qui sont basées sur des processus d'émission complètement différents :

- **Source thermique** : tout matériau à une température $T \neq 0$ rayonne de l'énergie. Dans le cas d'un corps noir (corps qui absorbe tous les rayonnements incidents), le spectre d'émission suit la loi de Planck. Le Soleil par exemple émet un spectre proche de celui d'un corps noir chauffé à $T = 5800$ K, et l'émission principale est dans le visible (mais aussi l'UV). Si toutes les sources thermiques ne suivent pas la loi de Planck, elles ont toutes une très grande largeur spectrale (elles émettent un continuum étendu de fréquences).
- **Source spectrale** : lorsqu'un atome est dans un état excité, après une certaine durée (le temps de vie du niveau excité), il émettra spontanément un photon dont l'énergie sera très proche de la différence d'énergie entre le niveau excité et le fondamental. Les niveaux étant propres à chaque atome, chacun émettra à des fréquences différentes. Contrairement aux sources thermiques, les sources spectrales émettent donc des rayonnements à des fréquences précises qu'on appelle des raies.
- **Lumière laser** : la lumière issue d'un laser est basée sur un autre processus d'émission (anticipé par Einstein) qu'on appelle l'*émission stimulée*. Sans entrer dans les détails, ce processus permet au rayonnement d'avoir une grande cohérence temporelle et spatiale (termes que nous définirons plus loin).

Ces sources ont des processus microscopiques différents, qui vont influencer leurs propriétés macroscopiques (spectre, longueur de cohérence temporelle, ouverture, etc.)

Au-delà de la classification en termes de processus microscopiques, on sépare également les sources en deux catégories :

- les sources ponctuelles : une source strictement ponctuelle est constituée d'un unique émetteur (un atome par exemple), mais nous considérerons aussi comme ponctuelles des sources de petit diamètre (typiquement ≤ 1 mm). On assimilera le rayonnement émis à une onde sphérique si la source est à distance finie, une onde plane sinon.
- les sources étendues : si la source est géométriquement étendue. C'est le cas générique si l'on ne prend pas de précautions particulières en TP. Le rayonnement est alors une superposition d'ondes sphériques ou d'ondes planes.

1.3.2 Modèle du train d'onde

Une source étendue est constituée d'un très grand nombre d'atomes. Suite à une excitation externe (thermique, électrique, lumineuse), les atomes entrent dans un état excité, puis se désexcitent. On peut décrire la relaxation de l'atome excité par un modèle classique de l'électron élastiquement lié et soumis à une force de frottement. Ce modèle est donc celui d'un dipôle oscillant amorti. Chaque dipôle va émettre un « train d'onde » durant cette désexcitation.

Définition

On appelle *train d'onde* un paquet d'onde émis par un atome lorsqu'il se désexcite. Une modélisation typique de ce train d'onde est donné par la fonction $f(t)$ suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ f_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. La fonction $f(t)$ représente l'oscillation du champ électrique générée par l'atome source. Le temps caractéristique τ représente la *durée du train d'onde*. La phase φ_0 est la phase à l'origine, par défaut aléatoire, qui sera cruciale pour la compréhension des interférences.

Transformée de Fourier

La transformation de Fourier consiste mathématiquement à associer à n'importe quelle fonction de carré intégrable $f(t)$ une fonction $\hat{f}(\nu)$ qu'on appelle sa **transformée de Fourier**. Celle-ci est définie par l'intégrale à paramètre suivante :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Tout l'intérêt de cette transformation réside dans le théorème de Fourier^a qui assure que la transformation de Fourier est un isomorphisme, c'est-à-dire qu'à toute fonction temporelle $f(t)$ est associée une **unique** fonction dans l'espace des fréquences $\hat{f}(\nu)$, et vice versa. On peut écrire la fonction $f(t)$ sous la forme d'une intégrale à paramètre de $\hat{f}(\nu)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

On dit que $f(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\nu)$. Physiquement, cette dernière expression a une interprétation très puissante : on comprend que $f(t)$ peut être décomposée en une somme d'OPPH $e^{2i\pi\nu t}$, avec un poids relatif donné par la fonction $\hat{f}(\nu)$. Le graphe de $|\hat{f}(\nu)|^2$ est appelé le **spectre** en fréquence de la fonction $f(t)$. Cette situation est très similaire au cas d'un spectre discret (c'est-à-dire lorsqu'on s'intéresse à des fonctions périodiques) : $|\hat{f}(\nu)|^2$ donne l'importance relative de la fréquence ν dans le spectre de la fonction.

^a. L'appellation « théorème de Fourier » est abusive mathématiquement, il faudrait parler de théorèmes de Fourier selon les propriétés vérifiées ou non par la fonction.

On retiendra du cadre précédent que :

- La transformée de Fourier permet d'associer à toute fonction $f(t)$ son spectre $\hat{f}(\nu)$.
- Physiquement, on décompose une fonction f sur la base des OPPH, et $\hat{f}(\nu)$ représente l'amplitude relative de l'OPPH à ν .

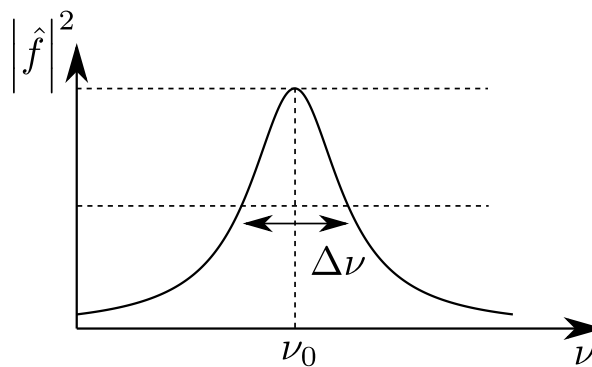


FIGURE 5.1 – Spectre $|\hat{f}(\nu)|^2$ du train d'onde $f(t)$

Application au cas du train d'onde On peut calculer explicitement le spectre $\hat{f}(\nu)$ dans le cas du train d'onde précédent :

$$\hat{f}(\nu) = \int_0^{+\infty} f_0 e^{-[2i\pi(\nu-\nu_0)+1/\tau]t} dt e^{i\varphi} = \frac{f_0 e^{i\varphi}}{2i\pi(\nu - \nu_0) + 1/\tau}.$$

On s'intéresse en particulier au module de la transformée de Fourier :

$$|\hat{f}|^2 = \hat{f} \cdot \hat{f}^* = \frac{f_0^2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + (1/\tau)^2}.$$

Cette fonction est représentée sur la figure 5.1. Son maximum est obtenu pour $\nu = \nu_0$, et la valeur de la fonction à mi-hauteur est obtenue quand $4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 = (1/\tau)^2$ soit $|\nu - \nu_0| = 1/(2\pi\tau)$.

Définition

On note $\Delta\nu$, la bande de fréquences pour laquelle la fonction est plus grande que $f_{\max}/2$. Celle-ci vaut d'après le calcul précédent $\Delta\nu = 2|\nu - \nu_0| = 1/(\pi\tau)$. Cette grandeur est appelée *largeur spectrale* du train d'onde.

Le résultat précédent est spécifique au modèle $f(t)$ choisi, un autre choix donnera un coefficient numérique différent. Cependant, on peut retenir de façon générale que

$$\Delta\nu \propto \frac{1}{\tau}.$$

La largeur spectrale de la source est inversement proportionnelle à la durée moyenne du train d'onde. Pour une source dont les trains d'onde sont inconnus, mais dont on connaît la largeur spectrale, on peut définir en inversant le raisonnement précédent un temps qui sera qualitativement la longueur des trains d'onde de la source :

Définition

Soit une source de largeur spectrale $\Delta\nu$, on appelle *temps de cohérence temporelle* τ_c la quantité :

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Le temps τ_c ainsi défini est caractéristique de la durée moyenne des trains d'ondes émis par la source. On définit de plus la *longueur de cohérence temporelle* comme la distance parcourue par l'onde dans le vide pendant le temps τ_c , c'est-à-dire une longueur caractéristique de l'extension spatiale du train d'onde dans le vide :

$$\ell_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}.$$

Le tableau 5.2 recense quelques exemples de longueurs de cohérence pour différents types de sources.

Source	λ (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	τ_c (s)	ℓ_c
Lumière blanche + filtre à gélatine	500	20	4×10^{-14}	10 μm
Lumière blanche + filtre interférentiel	500	1	8×10^{-13}	25 mm
Doublet du Sodium à 500 K	589-589,6	2×10^{-3}	6×10^{-10}	2 cm
Laser He-Ne non stabilisé	632,8	10^{-3}	$1,3 \times 10^{-9}$	40 cm
Laser He-Ne stabilisé	632,8	10^{-6}	$1,3 \times 10^{-6}$	400 m

TABLE 5.2 – Temps et longueurs de cohérence caractéristiques de différentes sources

Commentaires

- Une autre représentation du train d'onde couramment utilisée est celle d'une fonction sinusoïdale (non amortie) de durée finie τ . Les résultats sont qualitativement identiques à notre modèle.

- On peut noter que $\Delta\nu \rightarrow 0$ si $\tau_c \rightarrow \infty$, ce qui revient à dire qu'une onde parfaitement monochromatique correspondrait à un train d'onde de durée infinie. Il est donc impossible d'avoir une source parfaitement monochromatique : une source réelle aura toujours une largeur spectrale.
- Pour un train d'onde donné, la phase à l'origine de l'onde φ_0 est constante pendant la durée du train d'onde. En revanche, **elle varie aléatoirement entre deux trains d'ondes**. Sur un temps caractéristique d'observation d'un détecteur, l'atome s'est excité et désexcité un très grand nombre de fois (de l'ordre de $1/\tau = 10^9$ fois en 1 seconde); il émet donc un milliard de trains d'ondes successifs. Les processus d'excitation et de désexcitation se produisent de manière aléatoire dans le temps, il n'y a donc aucune relation entre la fin d'un train d'onde et le début du train d'onde suivant, la phase à l'origine φ_0 est une fonction de t qui change aléatoirement qui varie tous les τ_c .

Cette remarque est fondamentale pour comprendre les notions de cohérence qui seront décrites dans la partie suivante.

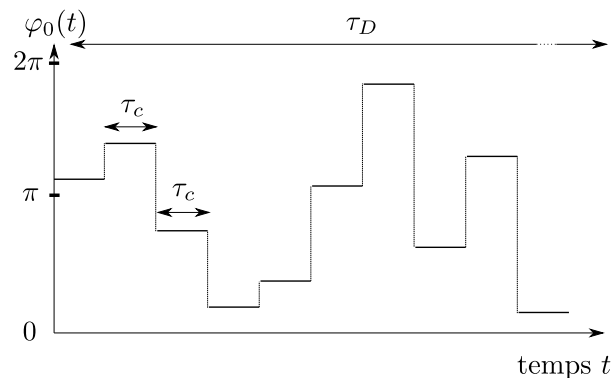


FIGURE 5.2 – Phase à l'origine du train d'onde émis en fonction du temps. Cette phase est constante le temps de l'émission d'un train d'onde τ_c , mais varie aléatoirement pour le train d'onde suivant.

Modèle d'émission de la lumière

L'émission d'une source lumineuse à la fréquence ν_0 peut être décrite de deux manières différentes :

- dans le **domaine temporel**, comme une succession d'un très grand nombre de trains d'ondes, de durée moyenne τ_c , de fréquence ν_0 mais de phase à l'origine aléatoire d'un train d'onde à l'autre $\varphi_0(t)$.
- dans le **domaine fréquentiel ou spectral**, comme une superposition d'ondes monochromatiques de durée infinie, de fréquences comprises dans un intervalle $\Delta\nu$ centré autour de ν_0 .

Ces deux descriptions sont reliées par une transformation de Fourier. En particulier, on retiendra que

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les différents types de sources lumineuses, ainsi que leurs propriétés
- ✓ Faire le lien entre largeur spectrale et temps de cohérence d'une source

2 Conditions d'interférences et formule de Fresnel

Maintenant que nous avons modélisé le fonctionnement des sources lumineuses et des détecteurs, nous pouvons aborder la notion d'interférences en optique.

On parle d'interférences entre plusieurs ondes lorsque l'éclairement lumineux résultant n'est pas égal à la somme des éclairements de chacune des ondes prises séparément.

2.1 Position du problème

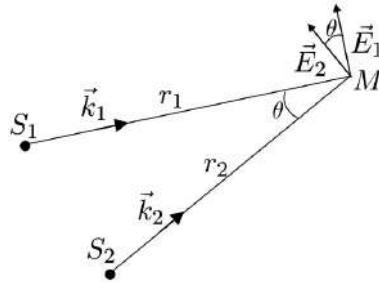


FIGURE 5.3 – Position du problème

Prenons l'exemple décrit sur la figure 5.3 où deux ondes électromagnétiques créées par deux sources distinctes S_1 et S_2 se superposent en un point M . Le champ électrique résultant s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Quel que soit le type d'onde (sphérique ou plane), les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_{01}(M)\vec{u}_1 \cos[\varphi_1(M) - \omega_1 t + \varphi_{01}(t)] \\ \vec{E}_2 &= E_{02}(M)\vec{u}_2 \cos[\varphi_2(M) - \omega_2 t + \varphi_{02}(t)]\end{aligned}$$

où :

- \vec{u}_i est un vecteur unitaire caractérisant la polarisation du champ \vec{E}_i ;
- $\varphi_i(M)$ représente la propagation spatiale du champ, c'est-à-dire $k_i r_i$ pour une onde sphérique ou $\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i$ pour une onde plane ;
- $\vec{u}_i \perp \vec{k}_i$ pour un milieu L.H.I. électrique non chargé.

Nous noterons les éclairements correspondants à chacun des champs en l'absence des autres

$$\mathcal{E}_1(M) = 2 \left\langle \|\vec{E}_1\|^2 \right\rangle_D = E_{01}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2(M) = 2 \left\langle \|\vec{E}_2\|^2 \right\rangle_D = E_{02}^2,$$

où nous avons pris $K = 2$ dans la définition de l'éclairement lumineux comme discuté précédemment. Pour qu'il y ait interférence, l'éclairement lumineux résultant \mathcal{E} doit être différent de la somme des \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Développons le calcul de l'éclairement en M :

$$\mathcal{E} = 2 \left\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \right\rangle_D = 2 \left[\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \right\rangle_D + \left\langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle_D + 2 \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle_D \right] = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 4 \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle_D$$

On retiendra donc :

Présence d'interférences

Pour qu'il y ait interférence entre les deux ondes, donc $\mathcal{E}(M) \neq \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$, il faut que

$$\left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle_D \neq 0.$$

Nous allons donc chercher les conditions pour que ce terme d'interférence soit non nul.

2.2 Conditions d'interférences

Nous considérerons que les deux ondes sont polarisées rectilignement. En posant $\phi_i(t) = \varphi_i(M) - \omega_i t + \varphi_{0i}(t)$ on a

$$\begin{aligned} 4 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_D &= 4(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) E_{01}(M) E_{02}(M) \langle \cos \phi_1(t) \cos \phi_2(t) \rangle_D \\ &= 4(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \left\langle \frac{\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_2 - \phi_1)}{2} \right\rangle_D \end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_i = E_{0i}^2$ l'éclairement lumineux de la source i seule.

Condition de polarisation

La première condition pour qu'il y ait interférence est que *les deux polarisations ne soient pas orthogonales* : $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \neq 0$.

Il est à noter que cette condition est indépendante du temps d'intégration du photodétecteur.

Si les deux ondes étaient non polarisées, le produit scalaire $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$ devrait rester dans la moyenne temporelle, et dans le cas général cette moyenne serait nulle.

Condition d'isochronisme

Les pulsations ω_1 et ω_2 étant positives $\omega_1 + \omega_2 = \Omega \neq 0$. On remarquera alors que

$$\langle \cos(\phi_1 + \phi_2) \rangle_D = \langle \cos(\varphi_1(M) + \varphi_2(M) + \varphi_{01} + \varphi_{02} - \Omega t) \rangle_D = 0.$$

En effet la moyenne temporelle de la fonction $\cos(\Omega t)$ sur un temps τ_D beaucoup plus long que la période d'oscillation de ce cosinus ($\frac{2\pi}{\Omega}$) vaut zéro.

À l'inverse $\langle \cos(\phi_2 - \phi_1) \rangle_D$ peut être différent de zéro seulement si $\omega_1 = \omega_2$. Une deuxième condition pour qu'il y ait interférence est que *les ondes aient la même fréquence*.

Remarquons que cette condition dépend cette fois-ci du temps d'intégration du photodétecteur : avec un détecteur extrêmement rapide, on pourrait autoriser un léger décalage de pulsations, typiquement telles que $|\omega_1 - \omega_2| \ll 1/\tau_D$. Avec un bon détecteur, il est par exemple possible de voir les interférences créées par deux lasers dont un est très légèrement désaccordé.

Provenance des trains d'onde

Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées,

$$\langle \cos(\phi_2 - \phi_1) \rangle_D = \langle \cos[\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_{01}(t) - \varphi_{02}(t)] \rangle_D.$$

La quantité $\langle \cos(\phi_2 - \phi_1) \rangle_D$ peut quand même être égale à zéro car $\varphi_{01}(t) - \varphi_{02}(t)$ varie aléatoirement dans le temps, d'après ce que nous avons vu sur le modèle du train d'onde (cf. figure 5.2). Cette variation aléatoire intégrée sur un temps de détection très long donne une moyenne nulle, sauf dans un cas : si φ_{01} et φ_{02} sont corrélées. Dans notre modèle d'émission chaque train d'onde est indépendant, la seule solution est que ces phases soient les phases à l'origine d'un même train d'onde ! Alors $\varphi_{01} = \varphi_{02}$. C'est très restrictif : il faut que les trains d'onde qui interfèrent soient issus de la même source ponctuelle, au même instant t .

Si les trains d'onde qui interfèrent sont issus de la même source, on dit qu'il y a *cohérence spatiale*. De plus, il faut que la différence de chemin suivi par ces deux trains d'onde ne soit pas plus grande que la longueur ℓ_c du train d'onde, pour qu'ils puissent se rencontrer et interférer. On parle de *cohérence temporelle*.

Conditions d'interférences

En conclusion, pour qu'il y ait interférences entre deux ondes il est nécessaire :

- que leurs polarisations ne soient pas orthogonales ;
- qu'elles aient la même fréquence ;

- elles soient issues de la même source ponctuelle ou quasi-ponctuelle (notion de cohérence spatiale)
- que le retard de l'une par rapport à l'autre ne soit pas supérieur à la durée du train d'onde de la source (notion de cohérence temporelle).

Dans ce cas, on dira que les deux ondes sont *cohérentes entre elles*, c'est-à-dire qu'elles ont une relation de phase bien déterminée.

Ainsi, pour calculer l'éclairement lumineux résultant provenant de deux sources on peut retenir le résultat suivant :

- Si les sources sont incohérentes (elles ne vérifient pas au moins une proposition ci-dessus), alors on somme simplement les éclairagements lumineux

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (\text{sources incohérentes}).$$

- Si les sources sont cohérentes, alors il faut sommer les champs, puis ensuite calculer l'éclairement de ce champ total. On aura $\mathcal{E}_{\text{tot}} \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

2.3 Formule de Fresnel

Finalement, l'éclairement s'écrit pour deux ondes de même polarisation ($\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1$) :

$$\mathcal{E}(M) = 2 \left\langle \left\| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right\|_D^2 \right\rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)).$$

Si on note $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ le déphasage entre les deux ondes, on obtient la relation dite de Fresnel :

Formule de Fresnel à deux ondes

Deux ondes cohérentes interfèrent, et donnent un éclairement résultant

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi(M)) \quad (\text{sources cohérentes}) \quad (5.5)$$

où $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ est le déphasage lié à la différence de trajet suivi par les deux ondes.

Remarque Dans le cas de deux ondes de polarisations différentes, il faudra prendre en compte de l'angle θ entre les deux polarisations dans le terme d'interférence et l'éclairement s'écrira : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2 \cos \theta \sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi)$.

Le cas particulier de deux ondes avec le même éclairement est important car se rencontre fréquemment.

Cas d'ondes de même éclairement

Pour deux sources de même éclairement $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$, la formule de Fresnel se simplifie :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(\Delta\varphi(M))] \quad (5.6)$$

2.4 Expression de la phase et différence de marche

Dans l'expression des interférences, il reste à interpréter la valeur de $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$, le déphasage entre les deux ondes se rencontrant au point M . La phase $\varphi_1(M)$ est directement reliée au trajet parcouru par la lumière pour aller de la source S au point M . **Dans le cas d'une onde sphérique, avec un trajet de la lumière en ligne droite entre S et M dans un milieu d'indice uniforme n , on a simplement**

$$\varphi_i(M) = k_i OM = 2\pi n \frac{OM}{\lambda}.$$

Il est possible de généraliser cette expression dans le cas où le chemin est brisé (entre S et M l'onde passe à travers un trou S_i par exemple), ou encore pour déterminer la phase accumulée par la traversée d'un milieu d'indice non-uniforme $n(\vec{r})$ (cas des mirages, des fibres à gradient d'indice, etc.).

Définition

Si un rayon lumineux passe par deux points A et B , on définit le **chemin optique** entre A et B noté (AB) par l'intégrale suivante^a

$$(AB) = \int_A^B n(\vec{r}) ds.$$

Dans le cas d'un milieu homogène d'indice n , le chemin optique se réduit à $(AB) = n \times AB$. De plus, le chemin optique pour un rayon passant successivement par trois points A , B et C peut se décomposer $(AB) + (BC)$.

^a. Stricto sensu, cette intégrale est une intégrale curviligne, c'est-à-dire le long du rayon lumineux.

Avec cette définition du chemin optique, on peut écrire la phase spatiale accumulée par une onde :

$$\varphi_i(M) = \frac{2\pi}{\lambda} (SM)_i$$

où le chemin optique $(SM)_i$ sera différent pour les deux ondes $i = 1, 2$.

Ainsi, on peut réécrire le déphasage $\Delta\varphi(M)$ entre les deux ondes comme relié à une différence de chemins optiques qu'elles ont parcourus :

Définition

On définit la **différence de marche** $\delta(M)$ comme la différence de chemin optique entre les deux ondes qui interfèrent au point M :

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1.$$

Alors, le déphasage entre les deux ondes s'écrit $\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}$.^a

^a. Noter qu'on aurait pu définir la différence de marche opposée $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$, cela ne change aucun résultat physique puisque la fonction cosinus est paire.

Retour sur la cohérence temporelle Nous venons de définir δ comme la différence de chemins optiques suivis par les trains d'onde selon les deux chemins. Or pour qu'il y ait interférence, il faut qu'il y ait recouvrement entre les trains d'onde venant des voies différentes. Donc il faut que le retard spatial accumulé (δ) ne dépasse pas la taille d'un train d'onde ℓ_c . La condition de cohérence temporelle devient alors l'inégalité :

$$\delta(M) \leq \ell_c.$$

Le décalage spatiale d'une onde par rapport à l'autre doit être petit devant ℓ_c pour être sûr qu'une partie du train d'onde interagira avec lui-même. Si on revient au tableau 5.2, on comprend qu'il est facile d'obtenir des interférences en lumière laser (la contrainte étant $\delta \leq 40$ cm), mais très difficile en lumière blanche puisqu'il faut $\delta \leq 10 \mu\text{m}$!

La connaissance de la différence de marche $\delta(M)$ permet de connaître intégralement la figure d'interférences. Tout problème d'interférences va donc se concentrer sur la détermination de $\delta(M)$.

2.5 Définitions et aspects expérimentaux

D'un point de vue expérimental, lorsque des interférences sont présentes, on observe des zones d'éclairement variables. Mathématiquement, cela vient de la variation spatiale de la fonction $\cos \Delta\varphi(M)$.

Définition

On écrit de façon générale le déphasage $\Delta\varphi(M)$ sous la forme

$$\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda} = 2\pi p(M),$$

où $p(M)$ est appelé **ordre d'interférence** au point M . L'ordre $p(M)$ est une fonction qui varie continûment avec la position. Deux cas particuliers sont intéressants expérimentalement :

- Si $p(M)$ est un entier, alors $\cos \Delta\varphi(M) = 1$, ou autrement dit $\delta(M)$ est un multiple entier de la longueur d'onde λ . Il y a interférences constructives entre les deux ondes, l'éclairement est maximal en ce point et vaut $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$. On parle de **frange brillante**.
- Si $p(M)$ est un demi-entier ($1/2, 3/2$, ou plus généralement $p + \frac{1}{2}$), alors $\cos \Delta\varphi(M) = -1$ ou $\delta(M)$ est un multiple demi-entier de la longueur d'onde. Les ondes sont en opposition de phase, il y a interférences destructives entre celles-ci. L'éclairement est minimal et vaut $\mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}$. On parle de **frange sombre**.



Attention, $p(M)$ est une fonction de la position comme $\delta(M)$, mais dépend en plus de la longueur d'onde ! Lorsque $p(M)$ est entier pour une longueur d'onde, il ne l'est pas nécessairement pour les autres. La position des interférences constructives sont propres à chaque longueur d'onde.

L'éclairement est donc compris entre \mathcal{E}_{\min} et \mathcal{E}_{\max} . La forme des zones sombres et brillantes définit la **figure d'interférences**.

Définition

On définit le **contraste** C de la figure d'interférence :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}.$$

Il s'agit d'un paramètre sans dimension, variant entre 0 et 1. Un bon contraste sera proche de 1. Si $C = 0$, on dit qu'il y a **brouillage des interférences**, l'éclairement est uniforme sur l'écran.

Pour deux ondes d'égal éclairement, on a $\mathcal{E}_{\max} = 4\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_{\min} = 0$. Les zones sombres sont noires et le contraste est maximal : $C = 1$.

Il est important de bien distinguer la notion d'éclairement de la notion de contraste : si on multiplie par deux l'éclairement de chaque source lumineuse, l'éclairement total est aussi multiplié par deux, mais le contraste est inchangé ! Pour une bonne image, on veut (1) un bon éclairement lumineux (sinon l'image sera difficilement visible), (2) et surtout un bon contraste pour distinguer la différence entre les zones brillantes et sombres ! Nous le verrons, il y a souvent des compromis à faire entre augmenter la luminosité et maintenir un bon contraste.

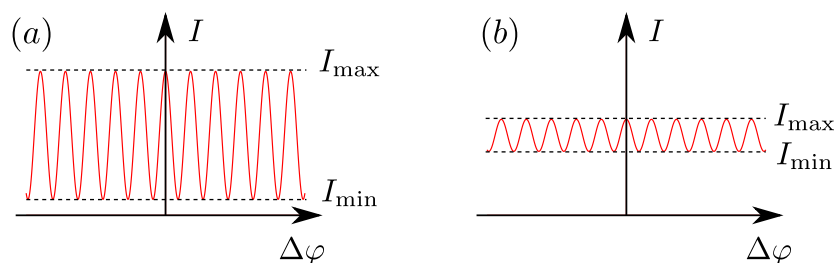


FIGURE 5.4 – Intensité lumineuse en fonction du déphasage entre les deux ondes. (a) bon contraste ($C \approx 1$) (b) mauvais contraste ($C \ll 1$)

Remarque On a défini le contraste globalement pour une figure d'interférence, mais il est possible que celui-ci varie spatialement. Dans ce cas, pour calculer le contraste en un point M , on cherche les valeurs minimale et maximale d'éclairement *localement*. De même si la figure d'interférence évolue dans le temps. Expérimentalement, la présence d'interférences signifie avoir $\mathcal{C} \neq 0$.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les conditions d'interférences, et justifier qu'elles sont nécessaires.
- ✓ Calculer un éclairement lumineux résultant dans le cas cohérent ou incohérent.
- ✓ Connaître les définitions relatives à une figure d'interférence.

3 Obtenir deux sources cohérentes

L'une des conditions d'interférences est que les trains d'ondes qui se rencontrent doivent provenir de la même source pour avoir une relation de phase non aléatoire. Cela restreint donc nécessairement notre étude aux sources ponctuelles.⁴

Il faut donc construire à partir d'une source ponctuelle, deux sources secondaires cohérentes entre elles. Il y a deux façons de répondre à cette problématique.

3.1 Dispositifs interférentiels

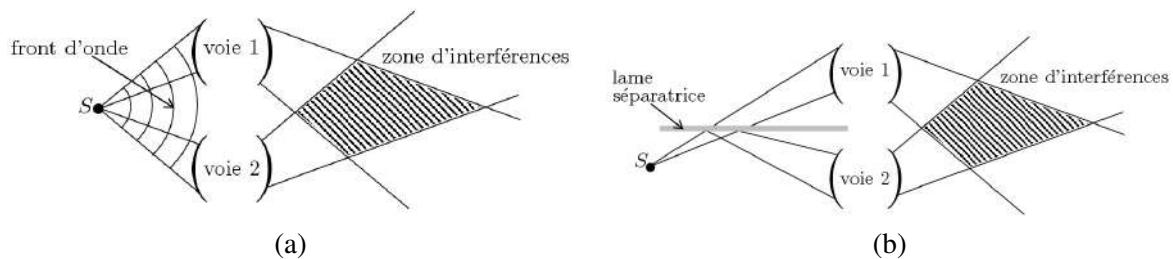


FIGURE 5.5 – (a) Système à division du front d'onde (DFO). (b) Système à division d'amplitude (DA).

Afin de réaliser des montages à partir d'une seule source, il existe deux familles de dispositifs :

Division du front d'onde Les systèmes où l'on coupe le front d'onde en deux parties spatialement séparées, comme l'expérience des trous d'Young, des miroirs de Fresnel, de la bilentille de Billet, etc. La figure 3.1 (a) représente un système interférentiel à division du front d'onde. Cet interféromètre à deux ondes est constitué d'une source ponctuelle S qui émet une onde sphérique et de deux dispositifs optiques (appelés voies 1 et 2) qui prélèvent chacun une partie du front d'onde. La zone d'interférences correspond à la zone de recouvrement des deux faisceaux issus des voies 1 et 2. Nous verrons que les dispositifs optiques représentés par les voies 1 et 2 pourront être de simples ouvertures dans un écran dans l'expérience des trous d'Young ou des miroirs dans celle des miroirs de Fresnel.

Division d'amplitude Il s'agit des systèmes qui séparent tout le front d'onde en deux. L'intégralité du front d'onde se retrouve dans chaque voie, typiquement avec la moitié de l'éclairement initiale : les interféromètres utilisent pour cela une séparatrice, comme les interféromètres de Michelson, de Mach-Zehnder, de Fabry-Pérot, etc. La figure 3.1 (b) représente un système interférentiel à division d'amplitude. En effet, la lumière émise par la source S est séparée en deux faisceaux par une lame semi-réfléchissante (réflexion 50 %, transmission 50 %) puis après les voies 1 et 2. Nous étudierons dans la suite les dispositifs à division d'amplitude les plus

4. Il existe des rayonnements spatialement cohérents sans être ponctuels, l'exemple le plus important étant le laser. Avec un type de lumière, obtenir des interférences est très facile. Il existe aussi des rayonnements partiellement cohérents qui sortent du cadre du cours.

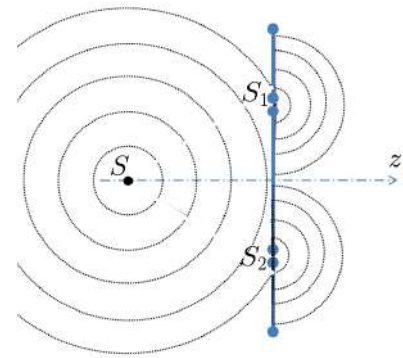
couramment utilisés en métrologie comme l'interféromètre de Michelson (interférométrie à deux ondes) ou celui de Fabry-Pérot (interférométrie à ondes multiples).

3.2 Les trous d'Young, un dispositif à division du front d'onde

Nous avons vu que pour avoir présence d'interférences, il faut que les trains d'onde qui interfèrent soient en fait issus du même train d'onde initial. On s'intéresse ici à l'expérience historique des trous d'Young.

3.2.1 Description de l'expérience

Dans l'expérience des trous d'Young décrite sur la figure ci-contre, une source monochromatique et ponctuelle S (émettant une onde sphérique) éclaire un écran percé de deux trous. Ces trous vont se comporter comme deux sources secondaires S_1 et S_2 cohérentes entre elles; ces sources secondaires considérées comme ponctuelles, émettront à leur tour des ondes sphériques. La justification de ces affirmations sera faite dans le chapitre 6. Ici, nous nous intéressons à l'étude des interférences créées par ce système.



Remarque Dans ce paragraphe on néglige la taille des trous. Cette hypothèse est évidemment non réaliste mais elle permet de nous affranchir de certains aspects liés à la diffraction de la lumière pour se concentrer sur le phénomène d'interférences. Nous reviendrons sur cette expérience dans le chapitre suivant pour voir qu'en fait ces deux phénomènes (diffraction et interférence) sont indissociables.

Hypothèses L'expérience se passe dans l'air, nous prenons donc l'indice $n = 1$. Les deux ondes étant, en fait, issues de la même source S , elles seront de même pulsation ($\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda}$) et spatialement cohérentes. Nous négligerons par la suite la polarisation de la lumière. On s'intéresse au cas où $\delta(M)$ reste petit devant la longueur de cohérence, afin que les deux ondes issues du même train d'onde puissent se superposer au point d'observation (cohérence temporelle). À partir de ces hypothèses nous pouvons calculer l'éclairement résultant en un point quelconque M de l'écran (cf. figure 5.6). La formule (5.5) s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} \cos\left(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}\right). \quad (5.7)$$

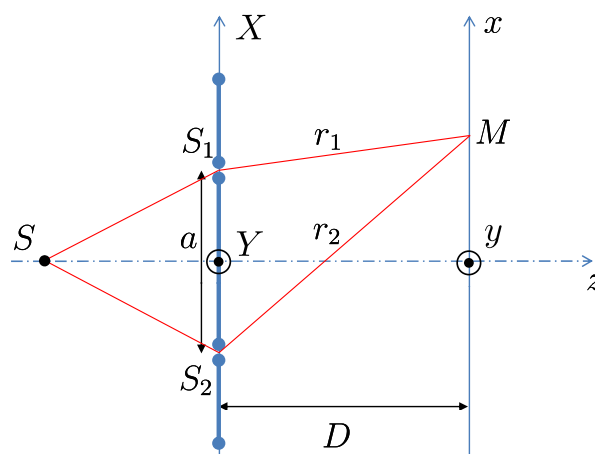


FIGURE 5.6 – Expérience des trous d'Young à distance finie

Comme indiqué sur la figure 5.6, la source S est placée à égale distance des trous, donc des sources secondaires S_1 et S_2 . Le plan des sources est défini par $z = 0$, et on le note (XOY) , celles-ci sont séparées d'une distance

a , donc situées en $(a/2, 0, 0)$ et $(-a/2, 0, 0)$. On observe les interférences sur un écran placé dans le plan d'équation $z = D$ noté (xOy) avec $D \gg a$. Le point M d'observation a pour coordonnées (x, y, D) avec $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$. On note r_i la distance entre la source S_i et le point M .

Simplification de la formule de Fresnel

Les deux trous S_1 et S_2 sont à égale distance de la source S , donc elles reçoivent le même éclairement lumineux. Maintenant, l'éclairement des ondes sphériques émises par les sources secondaires décroît avec la distance parcourue puisque que l'amplitude du champ décroît comme $1/r$ donc $\mathcal{E}_i(M) \propto 1/r_i^2$. Sur le schéma 5.6, en tout rigueur $\mathcal{E}_1(M) \neq \mathcal{E}_2(M)$. Cependant, comme on suppose être à grande distance des trous, on a à l'ordre le plus bas $r_1 \approx r_2$, on peut donc négliger les différences entre les éclairissements des deux ondes secondaires : $\mathcal{E}_1 \approx \mathcal{E}_2$, qu'on note \mathcal{E}_0 . Pour la même raison, on approximera que \mathcal{E}_0 est indépendant de la position du point M . À ce stade, l'éclairement (5.7) se simplifie pour deux sources d'éclairement égaux :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda} \right) \right).$$

Il reste à déterminer la différence de marche $\delta(M)$ dans ce problème. Celle-ci vaut

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M). \quad (5.8)$$

Les sources secondaires étant à égale distance de S , les termes (SS_i) se simplifient. On obtient donc

$$\delta(M) = S_2M - S_1M.$$

Rechercher la figure d'interférences revient à chercher le lieu des points M pour lesquels on a $S_2M - S_1M = \text{cste}$. Cette équation décrit des hyperboloïdes de révolution dans l'espace, et la figure d'interférences est l'intersection entre celles-ci et le plan d'observation de l'écran. La figure 5.7 permet d'appréhender la phrase précédente : on voit que l'orientation relative de l'axe des sources secondaires avec l'écran est cruciale pour la figure d'interférences. Dans notre situation, l'axe des sources S_1S_2 est parallèle au plan d'observation (axe x), on devrait donc observer une figure proche de franges rectilignes.

Nous allons vérifier ce résultat par le calcul. Pour cela, nous pouvons faire un développement limité en supposant toutes les autres distances du problème petites devant D .

$$S_iM = \sqrt{D^2 + \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = D\sqrt{1 + \epsilon_{\pm}} \approx D\left(1 + \frac{\epsilon_{\pm}}{2}\right)$$

avec

$$\epsilon_{\pm} = \frac{\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} = \frac{x^2 + y^2 + a^2/4}{D^2} \pm \frac{ax}{D}.$$

Les deux termes de même signe vont se compenser dans la différence de marche, on obtient donc :

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}.$$

La différence de marche ne dépend pas de y et varie linéairement avec la position x . L'éclairement résultant en un point quelconque M de l'écran s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right]. \quad (5.9)$$

L'éclairement varie sinusoidalement sur l'écran. Expérimentalement, on observe des franges brillantes lorsque $p(M) = \frac{ax}{\lambda D} \in \mathbb{Z}$, grandeur qui varie linéairement avec la position. La figure d'interférence est composée d'une succession de franges rectilignes régulièrement espacées, parallèles à l'axe (Oy) (cf. figure 5.8 (b)).

Symétrie de la figure d'interférence Il est important de remarquer que la figure d'interférence obtenue avec deux trous consiste en des franges *rectilignes* (elles sont perpendiculaires à l'axe joignant les deux trous). Cette symétrie rectiligne provient du fait que la solution à l'équation $\delta(M) = 0$ est une droite.

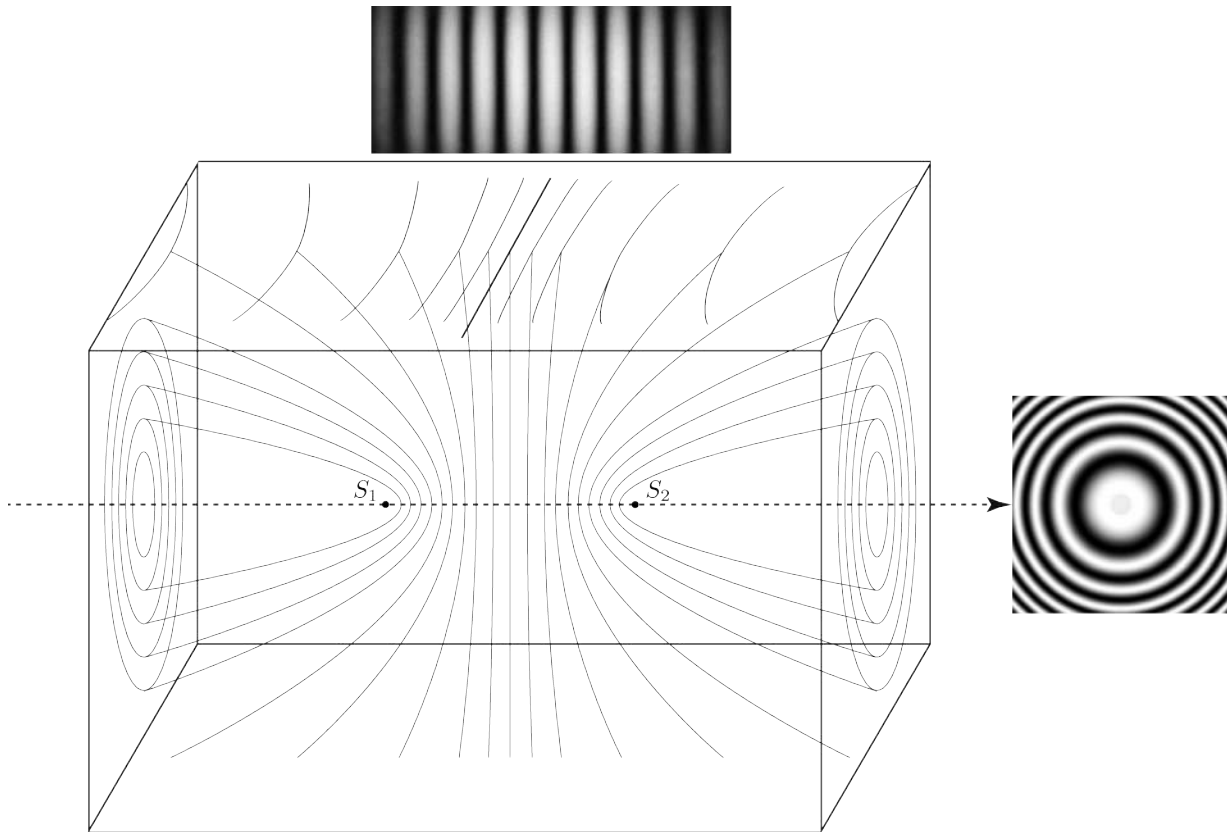


FIGURE 5.7 – Hyperboloïdes de révolution solutions de l'équation $S_2M - S_1M = \text{cste}$. Selon si on place l'écran parallèlement (resp. perpendiculairement) à l'axe des sources S_1S_2 , on obtient une figure ressemblant à des franges rectilignes (resp. circulaires)

Définition

L'éclairement lumineux varie ici de façon périodique avec la position x . On appelle *interfrange* et on le note i la période spatiale de l'éclairement lumineux sur l'écran, autrement dit la distance entre deux franges de même type (brillantes ou sombres) $i = x_p - x_{p-1}$. L'éclairement s'écrit donc

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right). \quad (5.10)$$

Dans le cas des trous d'Young, l'interfrange vaut

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

Limites de l'approximation Lorsque la condition ($D \gg |x|$ et $D \gg |y|$) n'est pas satisfaite comme sur les bords de la figure 5.8 (a), les développements limités sur $\delta(M)$ et sur l'approximation sur l'égalité des éclairements des deux sources ne sont plus valables. Il en résulte une déformation des franges et une baisse de contraste (cf. figure 5.8 (a)).

3.2.2 L'expérience des trous d'Young à l'infini

À partir de l'expérience des trous d'Young, on peut remarquer que plus on augmente la distance D (donc on éloigne l'écran), plus les rayons issus des sources qui interfèrent au point M tendent à être parallèles. À la limite, si le point M est repoussé à l'infini ($D \rightarrow \infty$), les rayons issus de S_1 et S_2 arrivant en M sont parallèles;

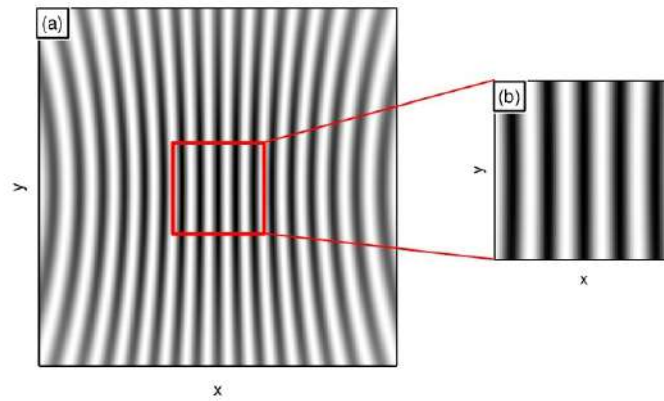


FIGURE 5.8 – Figure d’interférences obtenue dans l’expérience des trous d’Young. En (a) la condition $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$ n’est pas satisfaite sur les bords. La figure (b) est un zoom du centre de la figure (a). Dans cette zone la condition $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$ est valide.

on parle d’interférences *à l’infini*. En pratique, plutôt que de placer l’écran à une distance D très grande, on réalisera des interférences à l’infini en observant la figure d’interférences dans le plan focal image d’une lentille convergente. Cette lentille permet de ramener l’infini à une distance finie, donc d’avoir un montage compact (en plus de collecter plus de rayons lumineux).

Effet d’une lentille convergente En optique géométrique, on sait que des rayons parallèles incidents sur une lentille convergente vont se croiser dans un point du plan focal image. Or les rayons lumineux sont dirigés par le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, colinéaire au vecteur \vec{k} dans les milieux isotropes, qui est en tout point perpendiculaire aux surfaces d’onde. Si on trace les surfaces d’onde en amont et en aval de la lentille, on se rend compte qu’une lentille convergente transforme une onde plane en une onde sphérique convergent dans le plan focal image de la lentille ! C’est ce que montre la figure 5.9(a). Inversement sur la figure 5.9(b), si on applique le principe du retour inverse de la lumière, on voit que la lentille transforme une onde sphérique divergent d’un point dans son plan focal objet en une onde plane. La figure 5.10 montre une simulation de passage d’onde à travers une lentille. On voit que l’onde initialement plane devient sphérique !

Chemin optique et déphasage On sait en optique géométrique qu’une lentille convergente permet de conjuguer (avec stigmatisme approché) un point objet et un point image. En optique ondulatoire, cette condition signifie exactement que si A et A' sont deux points conjugués, alors $(AA') = \text{cste}$ quel que soit le chemin suivi. Ainsi, une lentille n’introduit aucun déphasage entre les points d’une même surface d’onde.

On peut exprimer ce déphasage de manière approchée. Le triangle S_1S_2H permet d’établir : $\sin \theta = \frac{S_2H}{a}$. Par ailleurs, la figure 5.9 (b) montre que $\tan \theta = \frac{x}{f}$ où f désigne la distance focale image de la lentille. Si les conditions de Gauss sont respectées, les angles par rapport à l’axe optique sont très petits et on pourra écrire $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$. On peut donc en déduire l’expression de la différence de marche en fonction de la position sur l’écran : $\delta = (S_2H) \simeq \frac{ax}{f}$ et finalement :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{i'} \right) \right]. \quad \text{avec} \quad i' = \frac{\lambda f}{a} \quad (5.11)$$

L’expression de l’éclairement est la même que pour des interférences à distance finie. On peut voir que la distance focale f a remplacé la distance D entre la source et l’écran dans l’expression de l’interfrange.

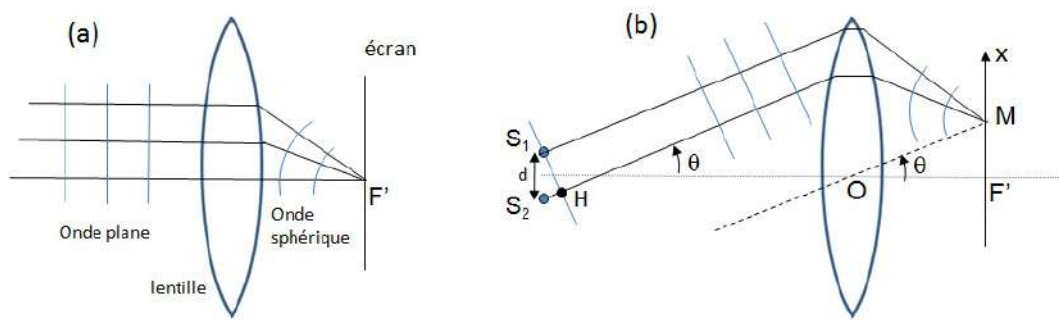


FIGURE 5.9 – Effet d’une lentille sur une onde plane. On a représenté sur la figure les surfaces d’ondes planes à gauche de la lentille, et sphériques à droite de la lentille. (a) les rayons parallèles à l’axe optique convergent au foyer F' ; (b) les rayons parallèles et inclinés d’un angle θ par rapport à l’axe optique convergent en M dans le plan focal image. On note $f = (OF')$ la distance focale.

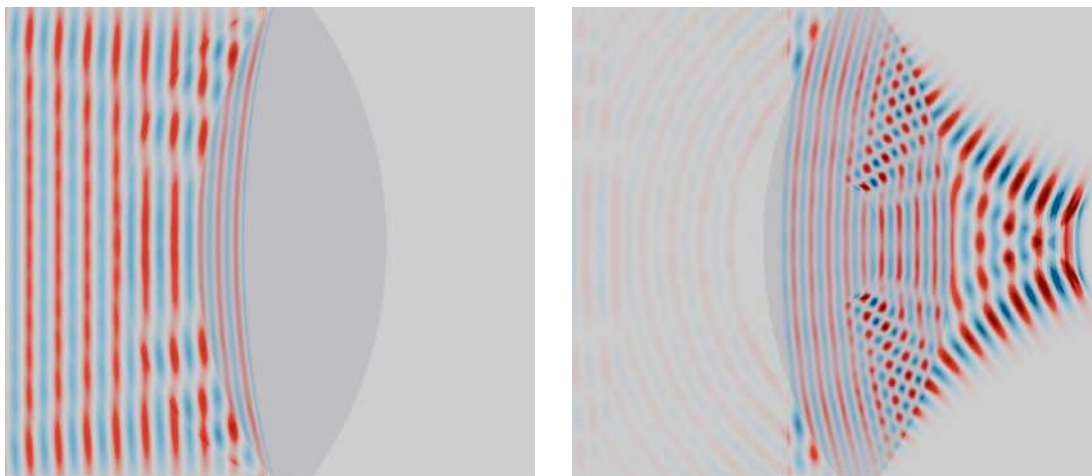


FIGURE 5.10 – Simulation du passage d’une onde plane sur une lentille : à gauche un front d’onde plane arrive en incidence normale sur une lentille ; à droite elle ressort (approximativement) sphérique. Emprunt autorisé de la simulation réalisée par Eliott Morgensztern.

3.3 L’interféromètre de Michelson, un exemple de division d’amplitude

L’interféromètre de Michelson est un dispositif d’interférences à deux ondes fonctionnant par division d’amplitude. Cet interféromètre est largement répandu car très utile pour faire de la métrologie, des mesures de spectres, du contrôle industriel d’épaisseur ou pour détecter les ondes gravitationnelles (expériences VIRGO et LIGO, découverte dévoilée le 11 février 2016).

3.3.1 Description du dispositif

L’interféromètre de Michelson est un dispositif d’interférence à deux ondes fonctionnant par division d’amplitude. Comme présenté sur la figure 5.11, l’onde incidente E tombe sur une lame séparatrice S qui va réfléchir une partie de l’onde vers la voie 1 et transmettre l’autre partie vers la voie 2. La plupart du temps la lame séparatrice est semi-réfléchissante c’est-à-dire qu’elle réfléchit et transmet 50 % de l’éclairement. Sur chacun des bras un miroir va réfléchir la lumière vers la lame séparatrice qui va de nouveau réfléchir et transmettre une partie des ondes vers les sorties 1 et 2. Ainsi sur chaque sortie une partie de la lumière aura été réfléchi par le miroir M_1 et l’autre par le miroir M_2 ; ces deux ondes issues de la même source mais ayant parcouru des chemins différents pourront donc interférer.

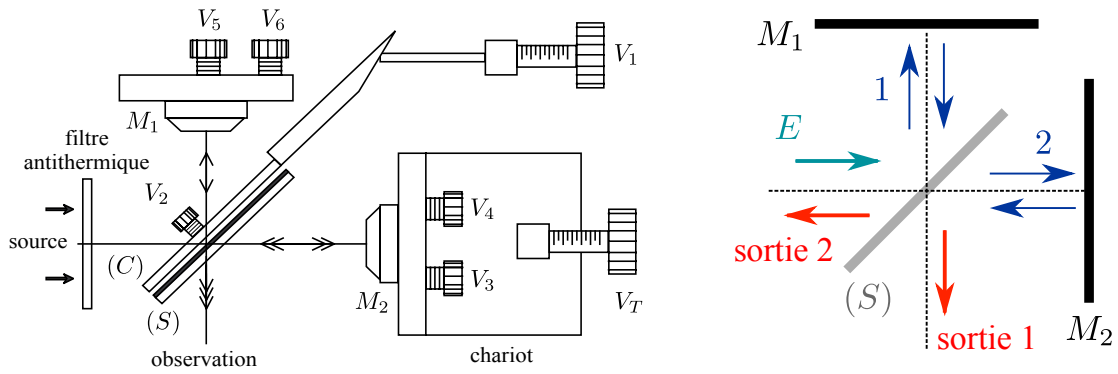


FIGURE 5.11 – À gauche : représentation schématique d'un interféromètre de Michelson. À droite : schéma des entrées et sorties de l'interféromètre

Soient \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 les éclairagements de l'onde provenant du miroir M_1 et M_2 . À la sortie 1, on a $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = RT\mathcal{E}_0$ avec \mathcal{E}_0 l'éclairagement en entrée, R (resp. T) le coefficient de réflexion (resp. transmission) en intensité de la lame (S). La sortie 1 permet donc d'avoir $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ et donc un contraste maximal $C = 1$ quelle que soit la réflectivité de la lame séparatrice.⁵

3.3.2 Schéma équivalent de l'interféromètre

Comme pour les trous d'Young, on éclaire l'interféromètre par une source ponctuelle monochromatique. Si l'interféromètre de Michelson semble plus complexe, il s'agit d'un interféromètre à deux ondes comme les trous d'Young, et peut être ramené au même schéma équivalent de deux sources (fictives) secondaires, comme indiqué sur la figure 5.12 que nous allons décrire pas à pas.

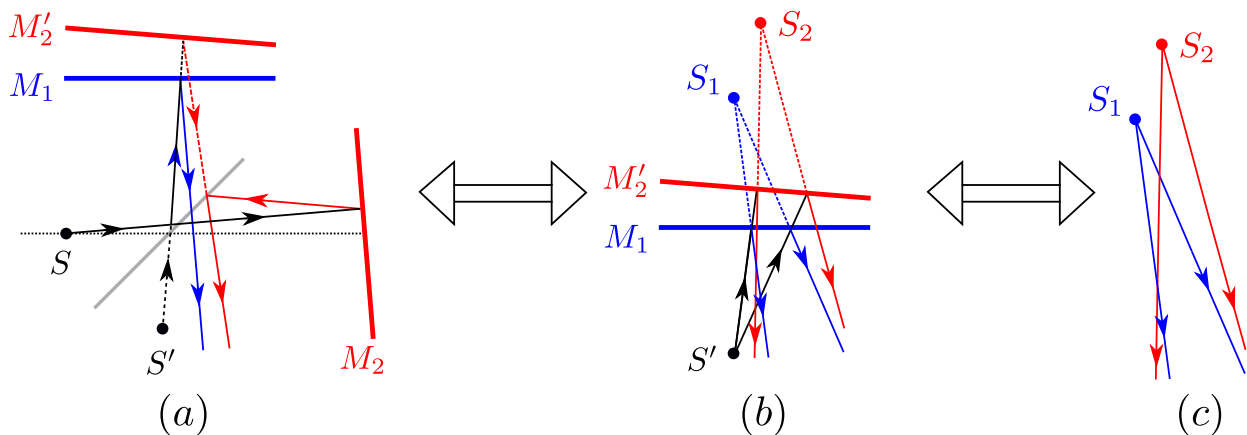


FIGURE 5.12 – Chemin suivi par un rayon d'une source ponctuelle. À droite, le système équivalent où S' et M_2' sont les images de S et M_2 par la séparatrice.

Étape (a) \rightarrow (b) Sur la figure 5.12(a) est tracé le parcours d'un rayon lumineux qui passe dans les deux voies de l'interféromètre, il en ressort deux rayons. Aparté : quand vous regardez un miroir, vous voyez votre image derrière le miroir, vous avez l'impression que les rayons viennent de derrière, alors qu'ils sont réfléchis par la surface. De même ici, depuis la sortie, il semble que les deux rayons viennent de la voie 1. Pour cette raison, on définit M_2' l'image du miroir M_2 par la séparatrice, qui se trouve dans la voie 1. À l'inverse, si on regarde au

5. Ce n'est pas le cas pour la sortie 2, puisqu'on a $\mathcal{E}_1 = R^2\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_2 = T^2\mathcal{E}_0$. La sortie S_1 est équilibrée avec un contraste maximal pour tout R , tandis que S_2 ne l'est que lorsque la lame est semi-réfléchissante : $R = T = 0,5$.

niveau du miroir M_1 , on a l'impression que la lumière vient de S' , l'image de la source S par la séparatrice. On arrive à l'étape (b) du dépliement des rayons sur la figure 5.12.

On donne souvent des appellations à deux configurations remarquables de l'interféromètre :

Définition

- On parle de configuration **en lame d'air** lorsque les deux miroirs M_1 et M_2' sont parallèles, mais avec une distance à la séparatrice différente. En effet, on peut alors faire un parallèle avec les interférences créées par une épaisseur $e = |d_1 - d_2|$ d'air entre deux miroirs dont un semi-réfléchissant.^a
- On parle de configuration **en coin d'air** lorsque les miroirs sont à égale distance de la séparatrice, mais avec un angle α non nul entre eux.

a. Il sera néanmoins important de ne pas confondre un interféromètre de Michelson fonctionnant en lame d'air qui est un interféromètre à deux ondes avec une véritable lame d'air (i.e. un interféromètre de Fabry-Pérot) qui est un interféromètre à ondes multiples (cf. fin du chapitre).

Étape (b) \rightarrow (c) Si maintenant on fait l'image de S' par M_1 et M_2' , on a deux points sources S_1 et S_2 . Tous les rayons issus de S et passant dans l'interféromètre semblent venir de ces deux points. On a ramené l'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle à deux sources ponctuelles cohérentes ! cf. figure 5.12(c).

Figure d'interférence À ce stade, on est ramené à la même étude que celle menée pour les trous d'Young. Si on cherche les surfaces telles que $\delta = \text{cste}$, on retrouve les hyperboloïdes tracés sur la figure 5.7. Tout dépend donc de la position de l'écran par rapport à l'axe passant par les deux sources $S_1 S_2$. La figure 5.13 montre la situation des deux configurations principales : lame d'air et coin d'air.

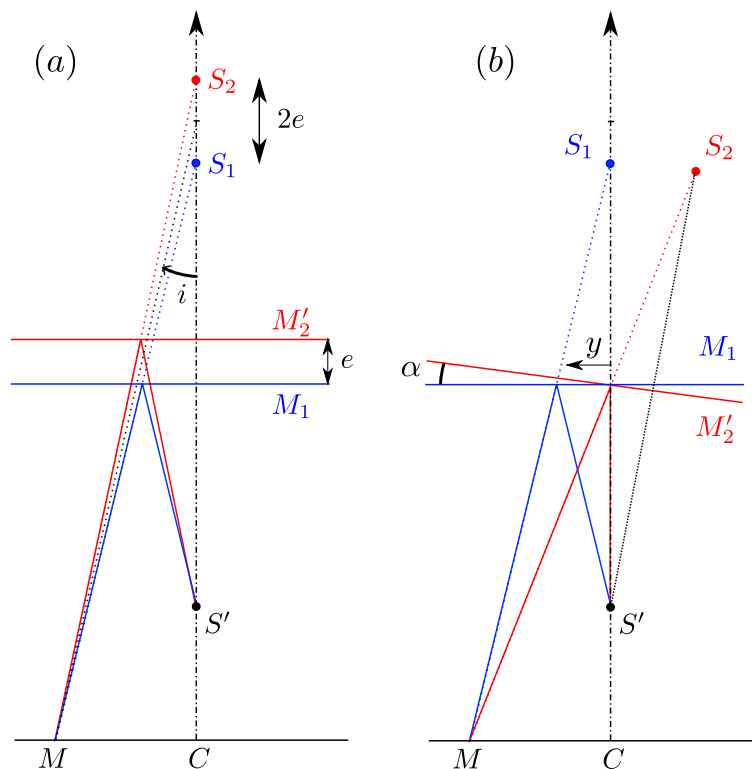


FIGURE 5.13 – Schémas équivalents de l'interféromètre de Michelson en configuration (a) lame d'air et (b) coin d'air.

- **En configuration lame d'air**, l'axe des sources est orthogonal au plan d'observation. On s'attend donc à voir des franges en forme d'anneaux (cf. figure 5.7).

- **En configuration coin d'air**, au contraire l'axe des deux sources est parallèle au plan d'observation. On revient donc dans la même situation que les trous d'Young, les franges sont rectilignes.
- Dans une situation intermédiaire où les miroirs ne sont ni parallèles ni à égale distance de la séparatrice : l'axe S_1S_2 coupe le plan d'observation de façon oblique ; on observe des portions d'hyperboles.

3.3.3 Interférences à l'infini en configuration lame d'air

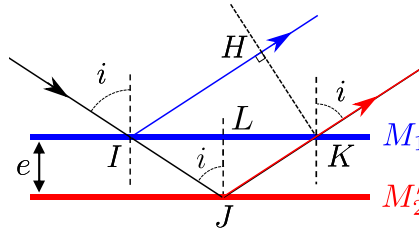


FIGURE 5.14 – lame d'air à l'infini

Dans une configuration où M_1 et M_2' sont parallèles, le cas d'une observation à l'infini est particulièrement intéressant. Lorsqu'on s'intéresse à l'image créée à l'infini, cela signifie expérimentalement qu'on regarde dans le plan focal image d'une lentille convergente. Les rayons qui convergent en un point de ce plan étaient tous parallèles les uns aux autres avant de passer dans la lentille. Il s'agit donc d'étudier la situation présentée sur la figure 5.14.

Pour cela, calculons la différence de marche δ entre les deux rayons sortants. D'après la figure 5.14,

$$\delta = (IJ + JK) - IH.$$

Or $IJ = JK = \frac{e}{\cos i}$, $IH = IK \sin i$ et $IK = 2IL = 2e \tan i$. D'où

$$\boxed{\delta = 2e \cos i}.$$

Cette formule (simple à retenir et souvent très mal redémontrée par les étudiants) montre que la différence de marche et donc l'éclairement ne dépendent que de l'épaisseur de la lame et de l'angle d'incidence du rayon lumineux :

$$I(i) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{2e \cos i}{\lambda} \right) \right).$$

On retrouve le résultat des interférences à distance finie : la figure d'interférences est constituée d'anneaux concentriques autour de l'incidence normale ($i = 0$). Cependant ici il s'agit d'un résultat exact, les franges sont plus contrastées. Ces franges ne dépendent que de l'angle d'incidence sont appelées **franges d'égale inclinaison**. Pour observer un maximum d'anneaux il faudra avoir une source lumineuse avec le maximum d'incidences i différentes, donc un faisceau de lumière conique. Expérimentalement, on utilise un condenseur très convergent pour avoir un grand nombre d'angles i , et tel qu'il focalise sur les miroirs. *A contrario*, si on éclaire avec un faisceau parallèle, cela signifie par définition qu'il n'y a qu'un seul angle i , et on ne verra qu'un seul anneau sur l'écran. La figure 5.15(b) montre les franges obtenues.

Remarquons que l'ordre d'interférence $p = 0$ (dont $\delta = 0$) est obtenu :

- soit pour une épaisseur entre les miroirs $e = 0$. La différence de marche est nulle entre les miroirs $\delta = 0$. Dans ce cas il n'y a pas d'anneau on parle de **teinte plate**.
- soit pour un angle d'incidence tendant vers $i = \pi/2$. Les anneaux du centre de la figure correspondent de façon contre-intuitive aux ordres p les plus grands, et les anneaux de la périphérie à des ordres plus petits.

3.3.4 Configuration en coin d'air : éclairage par un faisceau parallèle

Si les miroirs ne sont pas exactement orthogonaux ; le schéma équivalent 5.13(b) montre que les miroirs forment un coin d'air très aigu (l'angle α est très petit). En première approximation, on peut donc estimer que le coin se comporte comme une lame d'air d'épaisseur variable

$$e(y) = y \tan \alpha \approx y\alpha,$$

avec l'origine des y à l'intersection des miroirs. Dans cette configuration la différence de marche devient donc $\delta \approx 2y\alpha \cos i$ et varie linéairement avec la position y .

Pour éviter de faire varier deux paramètres à la fois (l'angle d'incidence i et l'angle α), l'interféromètre de Michelson fonctionnant en coin d'air est éclairé par un faisceau parallèle en incidence normale $i = 0$. Dans ce cas la différence de marche ne dépend que de l'épaisseur locale du coin d'air, on parle de *franges d'égale épaisseur*. L'éclairement s'écrit

$$I(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{y}{i'} \right) \right) \quad \text{avec} \quad i' = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

La figure d'interférence est constituée de franges rectilignes d'équation $y = \text{cste}$ c'est-à-dire parallèles à l'axe (Ox) , comme on peut le voir sur la figure 5.15(a). La distance entre deux franges c'est-à-dire l'interfrange est donné par i' ⁶. Il est assez simple de mesurer expérimentalement avec une grande précision l'angle α entre les deux miroirs.

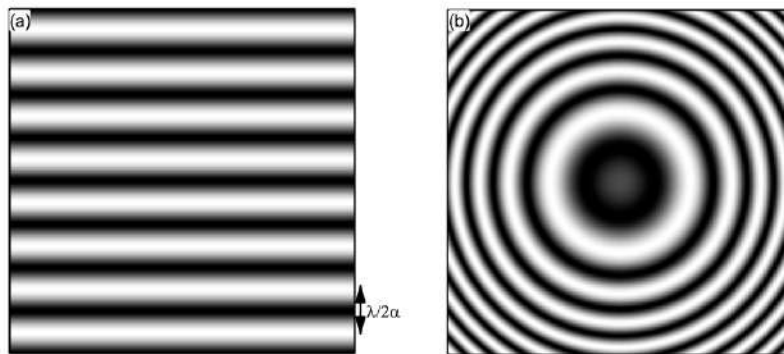


FIGURE 5.15 – (a) Franges d'égale épaisseur obtenues en configuration coin d'air et (b) anneaux d'égale inclinaison obtenus en configuration lame d'air.

Application Cette configuration est souvent utilisée pour vérifier la planéité d'une lame. En effet, si on place une lame dans l'une des voies de l'interféromètre réglé en coin d'air, les franges d'égale épaisseur vont se translater. On peut chariotter pour les ramener au centre de l'image. Maintenant on peut déplacer lentement la lame, pour éclairer d'autres parties de sa surface. Si la figure d'interférence à l'écran se translate un peu, c'est que l'épaisseur de la lame n'est plus la même. Et on peut mesurer de combien (à condition d'avoir préalablement mesuré α).

Résumé pour l'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle

En résumé les franges d'égale épaisseur (cf. fig. 5.15 (a)) sont obtenues en configuration coin d'air (les miroirs du Michelson ne sont pas strictement orthogonaux) éclairé par un faisceau parallèle^a alors que les anneaux d'égale inclinaison (cf. fig. 5.15 (b)) sont obtenus en configuration lame d'air (les miroirs de l'interféromètre de Michelson sont strictement orthogonaux) éclairé par une source large (faisceau

6. Attention de ne pas confondre l'angle d'incidence et l'interfrange.

divergent).

- a. Un point source placé au foyer d'une lentille convergente permet de faire un faisceau parallèle.

3.3.5 Cohérence temporelle

La grande force de l'interféromètre de Michelson est qu'un paramètre est modifiable, contrairement à l'interféromètre des trous d'Young. Grâce à un chariot, on peut modifier la position du miroir M_2 , ainsi jouer en lame d'air sur l'épaisseur e , et donc sur la différence de marche $\delta = 2e \cos i$.

Or les sources « monochromatiques » ont en réalité une largeur spectrale non nulle, comme le modèle du train d'onde l'a montré. Les sources ont une longueur de cohérence temporelle ℓ_c qui est finie. Si on chariotte e suffisamment, on peut passer d'une situation $\delta < \ell_c$ à $\delta > \ell_c$, et voir les interférences disparaître. Plus quantitativement, si le miroir se déplace à vitesse constante (à l'aide d'un moteur très lent), et qu'on enregistre l'évolution des franges d'interférences (ce qu'on appelle un *interférogramme*), il est possible de remonter à la forme du spectre de la raie étudiée ! Cette technique très utilisée est appelée *spectroscopie par transformée de Fourier*. Le TP 4 est dédié à cette méthode.

Compétences à maîtriser

- ✓ Distinguer dispositif à division du front d'onde et division d'amplitude
- ✓ Calculer une différence de marche et un interfrange dans l'expérience des trous d'Young ou une situation similaire.
- ✓ Utiliser un développement limité dans le cadre d'une approximation (en particulier celui de \sqrt{x} près de $x = 1$)
- ✓ Connaître le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson
- ✓ Connaître les deux systèmes équivalents selon la configuration des miroirs.
- ✓ Connaître la différence de marche dans une configuration en lame d'air, ainsi que la forme des franges dans les deux configurations.

4 Au-delà de la source ponctuelle monochromatique

Dans l'étude des deux situations précédentes, nous nous sommes focalisés sur un éclairage par une source ponctuelle monochromatique. En effet, si une source est étendue spatialement ou spectralement elle n'est plus cohérente, donc les interférences vont se brouiller. Cependant, dans certaines situations la symétrie du système permet de s'affranchir de cette limitation. Plus généralement, nous verrons qu'il est possible d'élargir dans une certaine limite la source afin de gagner en luminosité, sans perdre totalement les interférences.

Dans cette partie, on suppose avec un système d'interférence qui donne une différence de marche $\delta(M)$. On ne spécifie pas cette différence de marche pour garder un caractère général dans la première sous-partie.

4.1 Influence de l'étendue spectrale de la source

Deux ondes de longueurs d'onde différentes sont incohérentes. On peut assimiler une source polychromatique S à une superposition de sources monochromatiques *incohérentes* entre elles. En un point quelconque M l'éclairement total est la somme des éclairagements émis par chaque source monochromatique en ce point. Chacun de ces éclairagements vérifiant la formule (5.9), l'éclairement totale vaut

$$\ll I(\delta) = \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda}(\delta) = 2 \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{0,\lambda} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \right) \gg \quad (5.12)$$

où la fonction $\mathcal{E}_0(\lambda)$ est l'éclairement de la source S émise à λ .

4.1.1 Le doublet jaune du sodium

Les lampes à vapeur de sodium ont un spectre de raies constitué en particulier de deux raies jaunes très proches l'une de l'autre ($\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$) ; nous les considérerons comme infiniment fines et de même éclairement. Quelle est l'influence de ce doublet de fréquences sur l'éclairement lumineux ? Cette situation doit faire penser à vos cours d'ondes mécaniques précédents, ou si vous faites de la musique lorsque vous jouez en même temps deux notes très voisines (une seconde ou une sixte) : il y a des battements. ⁷ C'est ce que nous allons voir également pour les ondes lumineuses.

Soient λ_1 et λ_2 deux longueurs d'onde proches, c'est-à-dire telles que $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ est très petit devant $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Les deux longueurs d'ondes étant incohérentes, si une source avec ce doublet éclaire des trous d'Young, les éclairements de chaque longueur d'onde vont se sommer. La formule générale (5.12) s'écrit : ⁸

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2\mathcal{E}_0 \left[2 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= 4\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \cos\left(\pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right) \right] \\ &\approx 4\mathcal{E}_0 \left[1 + \underbrace{\cos\left(\pi\frac{\delta}{\lambda_m}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right)}_{=V(\delta)} \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_m}\right) \right]. \end{aligned}$$

À un facteur 2 près qui vient du nombre de sources, et la fonction $V(\delta)$, on retrouve la formule pour une source monochromatique à la longueur d'onde λ_m . Le facteur 2 global est sans importance, en revanche la modulation $V(\delta)$ apporte une richesse supplémentaire. Il s'agit d'une fonction périodique, dont la fréquence spatiale n'est plus λ_m , mais $\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_m^2}$. Or $\Delta\lambda \ll \lambda_m$, donc cette fonction oscille beaucoup moins vite que la fonction habituelle : c'est une modulation de la fonction cosinus principale.

L'éclairement est représenté à la figure 5.16, c'est donc le résultat du produit d'une fonction rapidement oscillante, et d'une fonction modulante $V(\delta)$, dont la fréquence est d'autant plus faible que les longueurs d'onde sont proches. C'est l'enveloppe de la courbe représentée en bleu sur la figure 5.16. Ainsi, la mesure entre deux nœuds de la courbe nous permet de mesurer l'écart en longueur d'onde. C'est un résultat utilisé en spectroscopie.

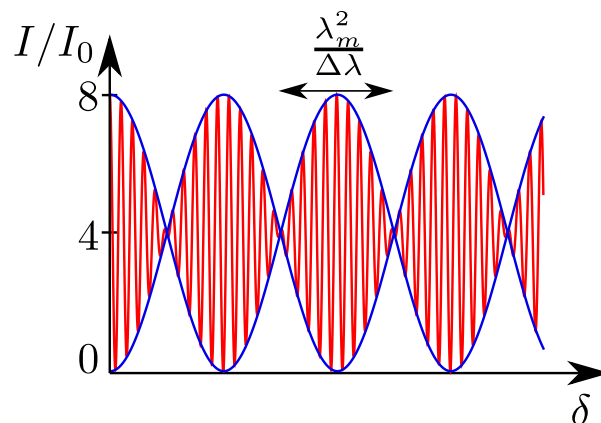


FIGURE 5.16 – Figure d'interférences (en rouge) obtenue dans l'expérience des trous d'Young éclairés par le doublet jaune du sodium. L'enveloppe bleue $\pm V(\delta)$ est la modulation due au doublet. Elle permet de déterminer l'écart entre les deux raies en mesurant par exemple la demi-période spatiale, égale à $\lambda_m^2/\Delta\lambda$.

7. Un effet utilisé également pour accorder des instruments entre eux.

8. On utilise la relation $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

4.1.2 Sources à spectre continu

Un spectre d'une source lumineuse peut également être composé d'un grand nombre de longueur d'onde, le spectre étant alors donné par une fonction continue.⁹ Il convient donc de définir la densité spectrale d'éclairement $B_\sigma(\sigma)$ qui caractérise le spectre de la source en fonction du nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$. En spectroscopie on travaille plus volontiers avec le nombre d'onde σ que la longueur d'onde λ . Pour passer du problème discret vu précédemment au problème continu, il faudra remplacer l'éclairement $\mathcal{E}_{0,\lambda}$ dans (5.12) par l'éclairement élémentaire $B_\sigma(\sigma)d\sigma$ pour une tranche de nombre d'onde $d\sigma$.

L'éclairement total pour une source à spectre large devient donc

$$I(\delta) = 2 \int_0^\infty B_\sigma(\sigma)(1 + \cos(2\pi\sigma\delta))d\sigma.$$

Si on développe le cosinus avec des fonctions exponentielles, et qu'on étend la définition de B_σ sur \mathbb{R}_- par parité, on remarque que l'éclairement s'écrit

$$I(\delta) = A + 2\hat{B}_\sigma(\sigma) \quad (5.13)$$

où A est une constante.

L'éclairement lumineux comme fonction de la différence de marche δ est directement relié à la transformée de Fourier du spectre B_σ !

Exemple : spectre monochromatique Dans le cas d'un pic monochromatique de nombre d'onde σ_0 , le spectre est une fonction de Dirac $\delta(\sigma - \sigma_0)$, et on retrouve

$$\mathcal{E}_{\text{mono}}(\delta) = 2 \int \mathcal{E}_0 \delta(\sigma - \sigma_0)(1 + \cos(2\pi\sigma\delta))d\sigma = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta)).$$

Exemple : spectre rectangulaire Prenons une source ayant un spectre rectangulaire de largeur $\Delta\sigma$ centré sur σ_0 comme représenté sur la figure 5.17 (a). En utilisant la formule du paragraphe précédent on peut calculer l'éclairement

$$\mathcal{E}_{\text{rect}}(\delta) = 2 \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} (1 + \cos(2\pi\sigma\delta))d\sigma = 2\Delta\sigma(1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta) \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta))$$

où la fonction sinus cardinal sinc est définie par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Cette fois encore, la fonction $V(\delta)$ varie lentement et joue le rôle d'enveloppe (en bleu sur la figure 5.17). Une différence importante avec le cas du doublet : la fonction n'est pas périodique, et on voit que plus la différence de marche augmente, plus le contraste (lié à la différence entre \mathcal{E}_{max} et \mathcal{E}_{min} calculés près du δ d'intérêt) diminue et tend vers 0. Qualitativement, on peut dire que les interférences disparaissent après la première annulation de contraste, c'est-à-dire pour $\delta > 1/\Delta\sigma$. On retrouve la définition de la longueur de cohérence temporelle, et la condition de cohérence : il faut $\delta \leq \ell_c = 1/\Delta\sigma$.

Plus $\Delta\sigma$ est grand, plus l'enveloppe décroît vite, et donc la différence de marche doit rester faible pour observer des interférences.

4.2 Influence de l'étendue spatiale de la source : cas des trous d'Young

Nous n'avons étudié pour l'instant que les interférences créées par des sources ponctuelles, et pour cause, une source large est composée de sources indépendantes incohérentes, et donc les interférences devraient disparaître. On revient dans ce paragraphe au cas de l'expérience des trous d'Young étudiée précédemment avec une source ponctuelle. Nous allons voir qu'il est possible de conserver une figure d'interférence en élargissant judicieusement la source lumineuse.

9. Même les sources qualifiées de « monochromatiques » ont une certaine largeur spectrale, donc ont un spectre continu en longueur d'onde.

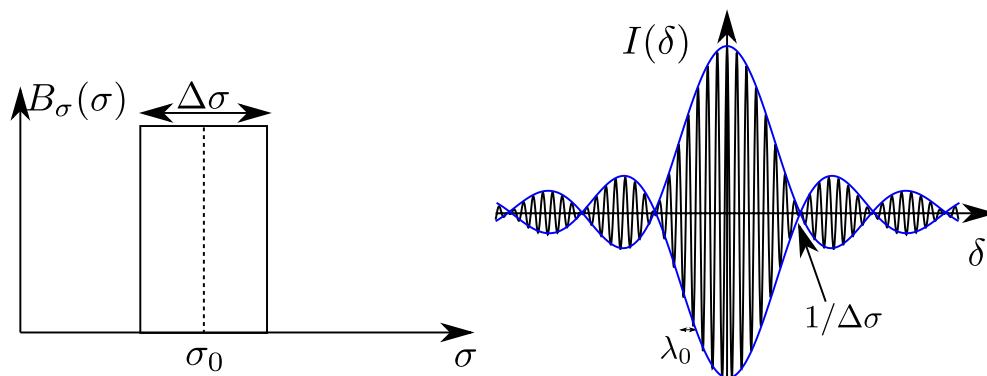


FIGURE 5.17 – À gauche : le spectre rectangulaire de la source. À droite : l'interférogramme obtenu dans l'expérience des trous d'Young éclairés par cette source.

4.2.1 Influence selon l'axe (OY)

Translation de la source La source S avait pour coordonnées $(0, 0, 0)$. Supposons qu'on décale la source ponctuelle selon l'axe (OY) sur la figure 5.6, qui est l'axe perpendiculaire au plan du schéma, ses coordonnées deviennent $(0, Y, 0)$. Les chemins optiques (SS_1) et (SS_2) de l'équation (5.8) vont être modifiés, puisque le trajet sera plus long pour atteindre les trous. Cependant, on reste sur le plan médiateur des deux trous, donc on conserve l'égalité $(SS_1) = (SS_2)$. Ainsi, la différence de marche est inchangée. Les interférences créées par une source ponctuelle décalée selon l'axe (OY) ont une figure d'interférence identique à la figure créée par la source S à l'origine du repère !

Source étendue On déduit de l'argument précédent que si les trous sont éclairés par la source à l'origine du repère et une source traduite de n'importe quelle quantité selon l'axe (OY), les éclairissements sur l'écran s'additionnent et les figures d'interférences se superposent exactement. L'éclairissement sur l'écran est ainsi plus grand, mais les interférences sont toujours visibles ($C = 1$). Cet argument justifie qu'on remplace expérimentalement un trou source par une fente source avec un résultat plus lumineux.

Ces mêmes raisons de symétrie justifient qu'on utilise expérimentalement des *fentes* selon l'axe Oy plutôt que des trous : on augmente la luminosité de la figure en ajoutant des sources incohérentes, mais dont les franges d'interférences se superposent parfaitement. C'est un exemple rare où augmenter la taille des sources secondaires ne modifie pas le contraste des interférences. On parle alors de *fentes d'Young*.

N'oublions pas que le fait que les franges obtenues soient rectilignes est décorrélié de l'utilisation d'une fente source ou de fentes d'Young, mais provient de la symétrie du dispositif.

4.2.2 Influence selon l'axe (OX)

Translation de la source Regardons l'influence d'une translation selon (OX) pour la source lumineuse, soit X sa position par rapport à l'axe optique (à ne pas confondre avec x la position du point M sur l'écran). La situation est décrite sur la figure 5.18. Ici, les chemins optiques changent différemment l'un de l'autre, on brise l'égalité $(SS_1) = (SS_2)$. Calculons cette contribution supplémentaire à la différence de marche (5.8).

On se place dans le cas où la distance entre S et les trous d'Young est grande devant l'espacement des trous et la translation de la source par rapport à l'axe, c'est-à-dire $d \gg a$ et $d \gg x$. On peut alors écrire à l'ordre 1 :

$$SS_1 = \sqrt{d^2 + \left(\frac{a}{2} - X\right)^2} = d\sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(\frac{a}{2} - X\right)^2} \approx d + \frac{1}{2d} \left(\frac{a}{2} - X\right)^2.$$

On calcule de même :

$$SS_2 \approx d + \frac{1}{2d} \left(\frac{a}{2} + X\right)^2.$$

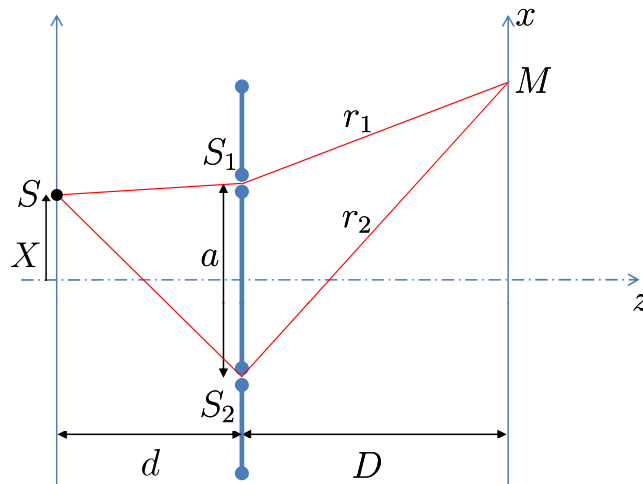


FIGURE 5.18 – Expérience des trous d’Young éclairés par une source translétée selon l’axe (OX) .

On obtient ainsi une différence de marche supplémentaire par rapport à la situation où la source S est sur l’axe optique : ¹⁰

$$\delta_{av} = SS_2 - SS_1 = \frac{aX}{d}.$$

Ainsi, la différence de marche totale pour un point M sur l’écran s’écrit

$$\delta = \delta_{av} + \frac{ax}{D} = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}.$$

En conclusion, nous observons la même figure d’interférence que pour la source S centrée, simplement translétée sur l’écran, puisque la frange brillante $\delta = 0$ est maintenant en $x' = -\frac{DX}{d}$ au lieu d’être en $x' = 0$.

Source étendue : approche qualitative Et si l’on souhaitait agrandir la source lumineuse selon l’axe (OX) à présent? Agrandir selon (OY) n’a apporté aucune différence de la figure d’interférence, puisque la différence de marche était inchangée pour tous les points de (OY) . Cela n’est plus vrai ici. Soit ℓ la largeur de la source. On note S la source élémentaire sur l’axe optique, et S_ℓ la source élémentaire à l’extrémité de la source totale, d’abscisse $X = \ell/2$.

Si on élargit légèrement la source, alors S_ℓ produira une différence de marche δ_{av} petite devant δ , les franges seront à peine translétées par rapport à S , on s’attend à ce que les interférences soient toujours visibles.

En revanche, si on continue d’élargir la source, δ_{av} va devenir important, au point d’être comparable à ax/D et la translation des franges de S_ℓ va brouiller les franges créées par S . On s’attend à un brouillage des interférences, typiquement lorsque la frange brillante centrale de S_ℓ (de position $x = -\frac{D\ell}{2d}$ d’après ce qui précède) est superposée à la première frange sombre de S , de position $x = \lambda D/2a$. C’est-à-dire pour une longueur

$$\ell = \frac{\lambda d}{a}.$$

En conclusion, il est possible d’élargir la source lumineuse selon l’axe (OX) pour avoir plus de luminosité, au prix d’une perte de contraste des interférences. Pour ne pas qu’elles soient brouillées, il faut garder une fente fine, c’est-à-dire $\ell \ll \frac{\lambda d}{a}$.

10. On remarque dans le calcul précédent et son résultat une certaine similitude avec le calcul initial de la différence de marche pour les trous d’Young.

Source étendue : approche quantitative (★) Le raisonnement précédent était qualitatif, il est possible de le rendre quantitatif. Le résultat est essentiellement le même, avec un bonus : on peut observer une inversion des franges brillantes et sombres dans certaines conditions sur la taille de la source.

On considère une source étendue centrée autour de O' et de longueur ℓ selon l'axe (OX) . Il s'agit d'une distribution continue de sources élémentaires réparties entre $-\ell/2$ et $+\ell/2$. L'éclairement émis par les sources entre X et $X + dX$ est notée $\mathcal{E}_{\text{lin}}dX$ où \mathcal{E}_{lin} est l'éclairement par unité de longueur. Soit \mathcal{E}_0 l'éclairement total de la source, alors $\int \mathcal{E}_{\text{lin}}dX = \mathcal{E}_0$ et pour une source homogène on a $\mathcal{E}_{\text{lin}} = \mathcal{E}_0/\ell$.

Les sources élémentaires sont incohérentes, on peut additionner les éclairagements émis par chaque élément. L'éclairement reçu au point M à travers le dispositif des fentes d'Young s'écrira donc, en posant $i' = \lambda d/a$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M) &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} 2\mathcal{E}_{\text{lin}} \left[1 + \cos \left(2\pi \left(\frac{x}{i} + \frac{X}{i'} \right) \right) \right] dX \\ &= 2\mathcal{E}_{\text{lin}}\ell + 2\mathcal{E}_{\text{lin}} \frac{1}{2\pi/i'} \left[\sin \left(2\pi \left(\frac{x}{i} + \frac{X}{i'} \right) \right) \right]_{-\ell/2}^{+\ell/2} \\ &= 2\mathcal{E}_0 + 2 \frac{\mathcal{E}_0}{\ell} \frac{1}{2\pi/i'} \left[\sin \left(2\pi \left(\frac{x}{i} + \frac{\ell}{2i'} \right) \right) - \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{i} - \frac{\ell}{2i'} \right) \right) \right] \\ &= 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\sin(\pi\ell/i')}{\pi\ell/i'} \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right],\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation $\sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$. Finalement :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + V(\ell) \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right]$$

avec

$$V(u) = \frac{\sin u}{u} = \text{sinc}(u) \quad \text{et} \quad u = \frac{\pi\ell}{i'}.$$

On obtient une expression similaire à la relation (5.10) avec le facteur $V(\ell)$ devant le cosinus. Pour une longueur de source ℓ déterminée, on a un éclairement maximal $\mathcal{E}_{\text{max}} = 2\mathcal{E}_0[1 + V]$ et un éclairement minimal $\mathcal{E}_{\text{min}} = 2\mathcal{E}_0[1 - V]$, donc un contraste $C = |V|$.

La fonction $V(\ell)$ est une fonction sinus cardinal qui diminue rapidement avec $u = \pi\ell/i'$, s'annule en $u = \pi$.¹¹ On voit donc que le contraste de la figure diminue rapidement avec la longueur de la source. Les franges se brouillent car les sources élémentaires sont incohérentes. Cependant, si $u \ll 1$, soit $\ell \ll i'$ alors $V \approx 1$, les franges seront visibles et l'éclairement devient identique à celle d'une source ponctuelle.

En conclusion, on dira que l'on peut observer la figure d'interférence avec la source étendue considérée comme quasi-ponctuelle tant que : $\ell \ll \lambda f'/na$. En pratique, il est nécessaire d'étendre la source pour avoir suffisamment de lumière pour observer la figure d'interférence, mais pas trop pour éviter le brouillage des franges. On devra donc trouver le bon compromis entre luminosité et contraste.

4.3 Influence de l'étendue spatiale de la source : cas de l'interféromètre de Michelson

On s'intéresse ici au cas des interféromètres à division d'amplitude, en particulier l'interféromètre de Michelson. Nous verrons que la conclusion est assez différente de celle des trous d'Young (et plus généralement des systèmes à division du front d'onde), ce qui explique qu'on privilégie en général.

4.3.1 Théorème de localisation ????

Localisation des interférences

Lorsque l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle (ou spatialement cohérente comme un faisceau laser), il y a des interférences partout où au moins deux rayons lumineux issus du même train d'onde se croisent (donc à condition que $\delta < \ell_c$). Il y a des interférences dans tout le champ d'interférences, on dit que les

11. Si on augmente encore un peu la taille de la source à partir de la position de contraste nul, la fonction V change de signe, ce qui implique qu'il y a inversion des franges sombres et brillantes, ce que l'on peut vérifier expérimentalement.

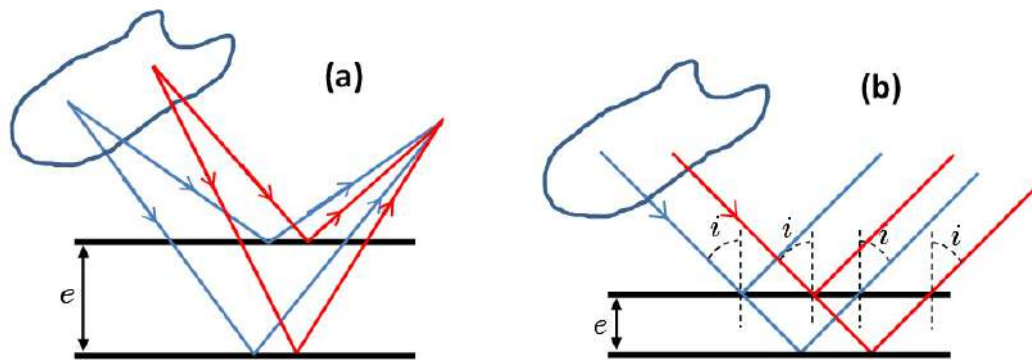


FIGURE 5.19 – (a) Position du problème d'une source étendue. (b) Localisation à l'infini des interférences.

interférences sont *non localisées*.

Lorsque la source est spatialement étendue (et incohérente), chaque source élémentaire va créer des franges d'interférences : un système d'anneaux centré sur l'axe S_1S_2 donné par les sources secondaires. Cependant cet axe est dépendant de la source S ponctuelle considérée dans la source étendue : les figures d'interférences créées par chaque point source étant décalées les unes par rapport aux autres, il va y avoir brouillage des interférences comme décrit dans le paragraphe 4.2.

Néanmoins il existe des lieux où les différents couples de rayons issus de sources différentes ont le même déphasage. Intéressons-nous aux deux configurations particulières : lame d'air et coin d'air.

Configuration lame d'air Dans cette situation, les franges circulaires sont brouillées à cause de la superposition incohérente des interférences. Ce phénomène est représenté sur le schéma (a) de la figure 5.19. Au point d'intersection des rayons bleus et rouges (issus de deux sources ponctuelles différentes) le déphasage (et donc l'éclairement résultant) qu'il y a entre les rayons bleus est différent de celui entre les rayons rouges.

Sauf dans un cas : lorsqu'on s'intéresse aux interférences situées à l'infini. En effet, comme représenté sur la figure 5.19(b), lorsqu'on choisit les rayons qui ressortent avec une inclinaison donnée, on remarque que le déphasage ne dépend plus de la position de la source S . Les rayons bleus ont entre eux le même déphasage que les rayons rouges. L'éclairement ne dépend que de l'inclinaison, il en résulte que toutes les figures d'interférences (anneaux d'égale inclinaison) vont se superposer sans se brouiller. Les interférences seront donc intenses et contrastées à l'infini ; on dit qu'elles sont *localisées à l'infini*.

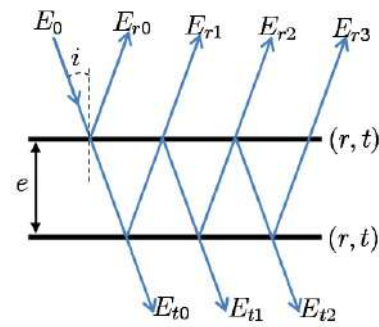
Configuration coin d'air En coin d'air, la situation est plus délicate. On peut montrer qu'il existe toujours un lieu où les interférences sont préservées : les interférences sont *localisées à proximité des miroirs* (au premier ordre). On observe donc toujours des franges rectilignes, à condition de faire l'image des miroirs de l'interféromètre sur l'écran d'observation.

Compétences à maîtriser

- ✓ Justifier l'effet d'un élargissement spectral ou spatial de la source lumineuse sur la figure d'interférence.
- ✓ Justifier la localisation des franges d'interférences dans un interféromètre de Michelson dans le cadre d'une source étendue en configuration lame d'air.

5 L'interféromètre de Fabry-Pérot (★)

L'interféromètre de Fabry-Pérot est un dispositif d'interférences à ondes multiples fonctionnant par division d'amplitude. Contrairement à l'interféromètre de Michelson, il correspond véritablement à une lame à faces parallèles. La figure d'interférences est le résultat d'une superposition d'un grand nombre d'ondes réfléchies. Ce système est constitué de deux miroirs parallèles partiellement réfléchissants éclairés par un faisceau parallèle arrivant avec un angle d'incidence i . Nous ne traiterons que le cas où les deux miroirs ont les mêmes coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude (cf. figure ci-contre). À partir d'un champ incident E_0 le système crée un champ réfléchi E_r et un champ transmis E_t résultants respectivement de la superposition des champs E_{r0}, \dots, E_{ri} et E_{t0}, \dots, E_{ti} représentés sur le schéma ci-contre.



Nous nous limiterons à l'étude de l'onde transmise. On note r et t les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le passage air \rightarrow lame. On note r' et t' les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le passage lame \rightarrow air.

En prenant l'origine des phases à la sortie du premier rayon transmis, on obtient pour $p \geq 0$,

$$E_{tp} = tt' r'^{2p} e^{ip\phi} E_0$$

avec $\phi = 2\pi \frac{2e \cos i}{\lambda}$ le déphasage entre deux rayons consécutifs. Le champ résultant transmis s'écrit donc

$$E_t = \sum_{p \geq 0} E_{tp} = tt' E_0 \sum_{p \geq 0} r'^{2p} e^{ip\phi} = \frac{tt' E_0}{1 - r'^2 e^{i\phi}}.$$

Dans ces conditions l'éclairement transmis par l'interféromètre vaut

$$\mathcal{E}_t = \frac{|tt'|^2 \mathcal{E}_0}{(1 - r'^2 e^{i\phi})(1 - r'^2 e^{-i\phi})}.$$

En utilisant les coefficients de réflexion et de transmission en énergie définies au chapitre 4 on a : $R = |r'|^2$, $R + T = 1$, et on peut montrer que $T = |tt'|$.¹² Alors

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0 \frac{T^2}{(1 - R e^{i\phi})(1 - R e^{-i\phi})} = \mathcal{E}_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

et en remarquant que $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}$, on fait apparaître la fonction d'Airy

$$\mathcal{E}_t = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + m \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad \text{avec} \quad m = \frac{4R}{(1 - R)^2}.$$

5.1 Étude de la fonction d'Airy

Remarquons d'abord que quel que soit le facteur de réflexion R des miroirs, lorsque la phase $\phi = 2p\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$), l'éclairement transmis est égale à l'éclairement incident : $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0$. Le facteur m étant positif, l'éclairement transmis sera minimale pour $\phi = (2p + 1)\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$) mais dépendra de m donc du facteur de réflexion R des miroirs :

$$\mathcal{E}_t((2p + 1)\pi) = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + m}.$$

Pour un miroir quasi-parfait ayant par exemple un coefficient de réflexion $R = 0,99$ (cf. courbe noire figure 5.20) ce minimum sera quasi nul alors que pour une lame de verre ($R = 0,04$ cf. courbe bleue figure 5.20) il sera quasiment égal à \mathcal{E}_0 (i.e. le maximum). Le contraste de la figure d'interférence sera donc donné par

$$V = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}} = \frac{m}{2 + m} = \frac{4R}{2(1 + R^2)}.$$

De même, nous pouvons voir sur la figure 5.20 que la largeur des pics de la fonction d'Airy dépend du coefficient de réflexion. La largeur à mi-hauteur ($\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0/2$) des pics vaut

$$\Delta\phi = 4 \operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{1}{m}} \right).$$

12. Démonstration à faire en exercice en prenant les expressions des coefficients de Fresnel pour une onde parallèle ou perpendiculaire. On rappelle que $T = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |t|^2$.

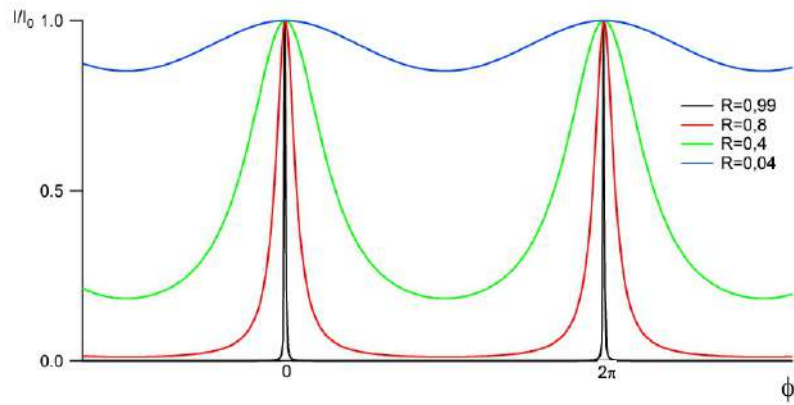


FIGURE 5.20 – Intensités transmises par un interféromètre de Fabry-Pérot pour 4 facteurs de réflexion : $R = 99\%$ courbe noire, $R = 80\%$ courbe rouge, $R = 40\%$ courbe verte et $R = 4\%$ (ex : lame de verre) courbe bleue.

Pour $m > 10$ c'est-à-dire pour $R > 50\%$, $\Delta\phi \approx 4\sqrt{\frac{1}{m}}$.

On définit la *finesse* de l'interféromètre de Fabry-Pérot par $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi} \approx \frac{\pi\sqrt{m}}{2}$.

5.2 Utilisation de l'interféromètre de Fabry-Pérot comme filtre

L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux miroirs ($R = 99\%$) séparés par une épaisseur e telle que un faisceau monochromatique (λ) arrivant en incidence normale ($i = 0$) sur les miroirs est totalement transmis. L'épaisseur peut donc s'écrire $e = p\frac{\lambda}{2}$, ($p \in \mathbb{Z}$) et la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi \approx 2 \times 10^{-2}$.

5.2.1 Filtrage spectral

Le Fabry-Pérot peut être utilisé pour filtrer un faisceau de longueur d'onde λ_1 proche de λ si

$$\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda) = 4\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda} \right) > 2 \times 10^{-2}.$$

De cette formule nous pouvons déduire que plus l'épaisseur e entre les miroirs est grande meilleur est le filtrage spectral. De la figure 5.20 nous pouvons tirer la même conclusion du facteur de réflexion des miroirs.

5.2.2 Filtrage angulaire

De même l'interféromètre de Fabry-Pérot peut être utilisé pour filtrer un faisceau qui n'arriverait pas en incidence normale. Dans ce cas il est nécessaire que

$$\frac{4\pi e}{\lambda} (1 - \cos i) \approx \frac{2\pi e}{\lambda} i^2 > 2 \times 10^{-2}$$

On retrouve donc les mêmes conclusions que pour filtrage spectral : le filtre sera d'autant plus efficace que e et/ou R seront grands.

Chapitre 6

Diffraction

Sommaire

1	Le principe de Huygens-Fresnel	141
2	La tache de Fresnel-Arago	143
3	Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer	144
3.1	Régime de Fresnel	145
3.2	Régime de Fraunhofer	146
3.3	Diffraction de Fresnel au foyer d'une lentille	147
4	Diffraction par une fente	147
5	Diffraction par plusieurs motifs identiques	150
5.1	Diffraction par deux fentes : retour sur l'expérience d'Young	150
5.2	Diffraction par une assemblée de motifs identiques	151
5.3	Motifs répartis aléatoirement	152
5.4	Réseau de fentes	153

Objectifs

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'effet de conditions aux limites sur la propagation d'une onde électromagnétique, en particulier une onde lumineuse. Nous énoncerons le principe de Huygens-Fresnel, puis nous identifierons deux régimes dits de Fresnel et de Fraunhofer. Dans ce dernier cas, l'amplitude diffractée prend la forme simple d'une transformée de Fourier. Nous terminerons ce chapitre par l'étude de cas simples tels que la diffraction par une ou plusieurs fentes rectangulaires, ainsi que l'étude du réseau.

1 Le principe de Huygens-Fresnel

On s'intéresse donc à la propagation d'une onde de longueur d'onde dans le visible entre une source S et un point M de l'espace. Si la propagation est libre, on calcule facilement l'amplitude du champ en M selon le type d'onde considéré (plane, sphérique, onde de rayonnement). Cependant, si un obstacle se trouve sur le chemin, les conditions aux limites imposées par cet obstacle vont modifier la solution des équations de Maxwell, et ainsi modifier l'onde en M .

Dans ce chapitre, notre point de départ ne sera pas les équations de Maxwell, ce qui amènerait à de longs calculs techniques, mais nous débiterons avec le principe de Huygens-Fresnel. Dans cette optique, nous négligerons l'aspect vectoriel des champs. De plus, nous ne considérerons que des obstacles plans et grands devant la longueur d'onde de la lumière incidente ($a \gg \lambda$).

Prenons par exemple la surface plane Σ de la figure 6.1, située dans le plan $(x'O'y')$. On place dans ce plan un objet diffractant éclairé par une source S ponctuelle monochromatique.

L'idée de Huygens, développée quantitativement par Fresnel deux siècles plus tard, est d'oublier la vraie source S , et de considérer la surface dans le plan Σ comme la source (secondaire) de l'onde. Chacun des points émettrait une onde (appelée ondelette) d'amplitude proportionnelle à l'onde provenant de S . Plus précisément :

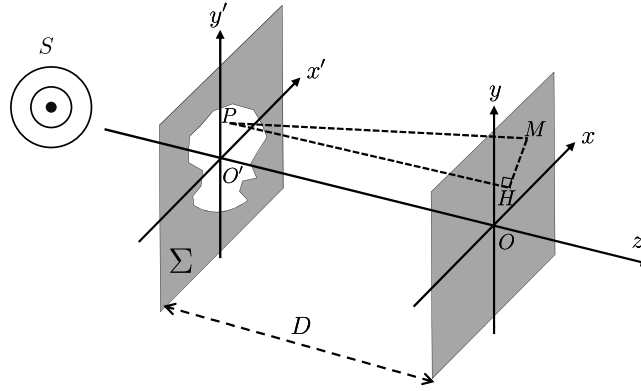


FIGURE 6.1 – Position du problème : objet diffractant dans le plan $(x'O'y')$ et M dans le plan d'observation (xOy)

Principe de Huygens-Fresnel

L'amplitude du champ au point M est issue de la somme cohérente d'ondelettes émises par chaque éléments de surface dS_P de Σ centré sur le point $P \in \Sigma$. L'amplitude de cette ondelette (issue d'une source fictive) est proportionnelle à l'amplitude $\underline{E}_0(P)$ de l'onde issue de S arrivant en P , avec un facteur de proportionnalité $1/i\lambda$.^a

En se propageant de P à M , l'ondelette étant sphérique, elle acquiert une phase supplémentaire e^{ikPM} , et son amplitude est multipliée par $1/PM$.

Ainsi, le champ au point M peut s'écrire :

$$\underline{E}(M) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{P \in \text{objet}} \underline{E}_0(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} dS_P.$$

a. La présence de $1/i$ correspond à un déphasage de $-\pi/2$ par rapport à l'onde incidente. Ce déphasage est de même nature que le déphasage de π qui intervient lors du passage d'une onde sphérique par son centre.

Ce principe s'applique de façon générale à toute les ondes électromagnétiques, mais peut aussi être étendu aux ondes mécaniques. Nous observons en effet les mêmes phénomènes de diffraction et d'interférence dans les ondes mécaniques.

Définition

On appelle **fonction de transparence** d'un obstacle sa capacité à transmettre l'onde incidente. Elle est notée $\underline{t}(P)$ et de façon générale $\underline{t}(P) \in \mathbb{C}$. On a en particulier :

- sans obstacle en P , $\underline{t}(P) = 1$;
- avec un obstacle opaque, $\underline{t}(P) = 0$;
- pour un obstacle qui atténue l'onde (comme les filtres densités) : $0 < t(P) < 1$;
- pour un obstacle qui modifie le chemin optique (une lentille, un milieu d'indice n , etc.), $\underline{t}(P) = e^{i\varphi(P)}$.

La fonction de transparence de l'obstacle modifie l'amplitude de l'ondelette émise en P , l'amplitude diffractée s'écrit

$$\underline{E}(M) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{P \in \Sigma} \underline{t}(P) \underline{E}_0(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} dS_P.$$

Pour simplifier les calculs, nous allons traiter le cas où la surface Σ est uniformément éclairée par une onde plane arrivant en incidence normale. On prendra l'origine des phases dans le plan de la surface de sorte que $\underline{E}_0(P) = E_0$. Le champ diffracté par Σ en $M(x, y, z)$ s'écrit alors

$$\underline{E}_\Sigma(M) = \frac{E_0}{i\lambda} \iint_{(x', y') \in \mathbb{R}^2} \underline{t}(x', y') \frac{e^{ikPM}}{PM} dx' dy' \quad (6.1)$$

avec $PM = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}$. Soit H le projeté orthogonal de P sur l'écran (cf.fig. 6.1), de coordonnées (x', y', z) , on a plus simplement $PM = \sqrt{z^2 + HM^2}$.

Théorème des pupilles complémentaires Considérons une pupille Σ et sa pupille complémentaire $\bar{\Sigma}$ qui laisse passer l'onde là où la première pupille la bloquait et vice versa, donc telle que $t_{\bar{\Sigma}} = 1 - t_{\Sigma}$. Alors, la fonction de transmission de l'ensemble est $t_{\Sigma \cup \bar{\Sigma}} = 1$. Cette fonction de transparence correspond à la propagation libre de l'onde issue de S jusqu'à M . Ainsi :

$$E_{\Sigma}(M) + E_{\bar{\Sigma}}(M) = E_{\text{libre}}(M).$$

Remarque On s'intéresse *in fine* à l'intensité lumineuse. Celle-ci est donnée par $I(M) = \underline{E} \underline{E}^*$. Dans ce chapitre, pour ne pas alourdir des expressions déjà chargées, on n'écrit jamais les dépendances $e^{-i\omega t}$ puisqu'elles se simplifient toujours lors du calcul de I .

Compétences à maîtriser

- ✓ Énoncer en toutes lettres le principe de Huygens-Fresnel

2 La tache de Fresnel-Arago

En 1817, afin de trancher la question de la nature de la lumière, l'Académie des Sciences de Paris lança un concours sur le thème de la diffraction de la lumière, auquel Auguste Fresnel participa. Son mémoire en faveur d'une nature ondulatoire pour la lumière qui développa le formalisme précédent laissa certains scientifiques sceptiques, dont Siméon Poisson. Celui-ci se pencha attentivement sur cette théorie et trouva une faille, puisque la formule de Fresnel prévoit l'existence d'une concentration de lumière derrière un obstacle circulaire, au centre de l'ombre géométrique. Ce résultat absurde invalide donc la théorie de Fresnel. . .

Cependant, un autre académicien François Arago réalisa l'expérience, et contre toute attente confirma la présence d'une tache lumineuse au centre de l'ombre géométrique d'un objet circulaire ! Fresnel remporta le prix de l'Académie, la théorie ondulatoire fut d'un coup projetée sur le devant de la scène.

Nous allons démontrer ce résultat surprenant.

Calcul de l'amplitude diffractée Commençons par calculer l'amplitude diffractée par la pupille complémentaire : un trou circulaire dans une feuille opaque.

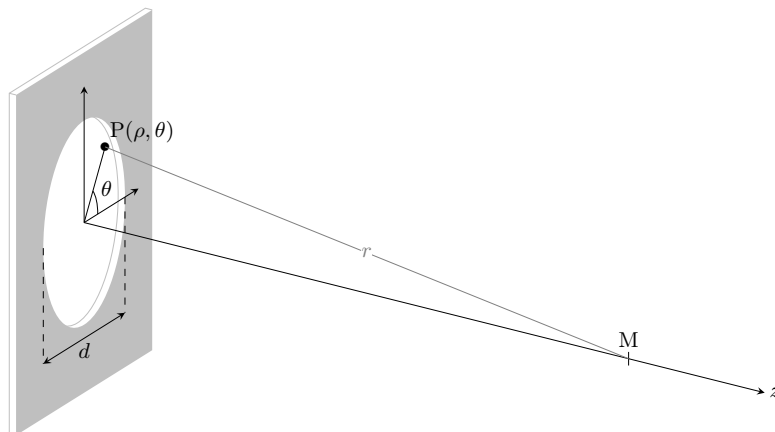


FIGURE 6.2 – Paramétrage de la diffraction par une ouverture circulaire.

L'onde incidente étant plane, elle est constante sur le plan de l'ouverture, appelons sa valeur E_0 . On a

$$\begin{aligned}\underline{E}(M) &= \frac{E_0}{i\lambda} \iint_{\text{disque}} \frac{e^{ik \cdot PM}}{PM} dx' dy' \\ &= \frac{E_0}{i\lambda} \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} d\theta \\ &= \frac{E_0 2\pi}{i\lambda} \int_z^{\sqrt{d^2/4+z^2}} e^{iku} du \\ &= \frac{E_0 k}{i} \frac{1}{ik} \left[e^{ik\sqrt{d^2/4+z^2}} - e^{ikz} \right]\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $u = \sqrt{z^2 + \rho^2}$. Ainsi

$$\boxed{\underline{E}(M) = E_0 e^{ikz} - E_0 e^{ik\sqrt{d^2/4+z^2}}.}$$

Cette égalité est très intéressante. L'onde arrivant en M est la superposition de deux ondes remarquables :

1. de l'onde incidente E_0 qui s'est propagée directement de S à M (et a parcouru une distance z depuis l'obstacle). Sans diaphragme, cette onde serait la seule à parvenir en M ;
2. et une onde qui a parcouru une distance $\sqrt{d^2/4 + z^2}$, donc qui provient des bords du disque ! Celle-ci est déphasée de π par rapport à l'onde incidente.

L'intégrale de surface sur le plan Σ après calcul donne une quantité qui semble provenir d'un contour : le périmètre du disque. Cette observation a poussé Thomas Young à reformuler le principe de Huygens-Fresnel sous une forme plus « physique » : dans sa formulation, les ondes secondaires ne sont pas émises de tous les points fictifs du plan Σ , mais plutôt *des bords de l'obstacle*. Ces bords étant matériels, ils peuvent répondre à une excitation EM, et on comprend mieux l'origine des ondelettes secondaires (et d'un déphasage).¹

En utilisant le théorème des pupilles complémentaires, puisque la propagation libre est simplement $E_0 e^{ikz}$, on en déduit que le champ dans le cas d'un disque vaut

$$E_{\Sigma}(M) = E_0 e^{ikz} - \left(E_0 e^{ikz} - E_0 e^{ik\sqrt{d^2/4+z^2}} \right) = E_0 e^{ik\sqrt{d^2/4+z^2}}$$

et donc pour l'intensité :

$$\boxed{I_{\Sigma}(M) = I_0.}$$

On trouve ainsi une intensité lumineuse constante quelle que soit la distance z ! Malgré un cache opaque, la théorie de la diffraction prévoit une intensité lumineuse maximale sur l'axe. Pour observer cette « tache », il faut avoir des conditions expérimentales bien maîtrisées, en particulier avoir un disque bien rond et net. La figure 6.3 est une photographie de l'expérience en lumière blanche.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître l'origine historique de la théorie ondulatoire, et savoir la repérer chronologiquement.

3 Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

Le principe de Huygens-Fresnel ne s'applique qu'en *champ lointain* c'est-à-dire pour $z \gg \lambda$. Pour des distances de l'ordre de λ , il faut revenir à une description vectorielle de la lumière et repartir des équations de Maxwell, approche qui sort largement du cadre de ce cours.

Dans le cas où la distance z est grande devant l'objet et la taille de l'image ($z \gg a$ et $z \gg HM$), il est possible de simplifier l'intégrale (6.1). Dans ce cas, on observe la figure de diffraction au voisinage de l'image de l'optique géométrique (à l'intérieur ou l'extérieur de celle-ci). Ce régime s'appelle le régime de Fresnel.

1. On peut en effet montrer qu'il existe une reformulation du principe de Huygens-Fresnel en termes de diffraction aux bords. On se référera à GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company Edition. p.55 pour quelques références approfondies ou à BORN & WOLF, *Principles of Optics*, Cambridge University Press p.499 pour plus de détails et un calcul explicite de l'onde diffractée.

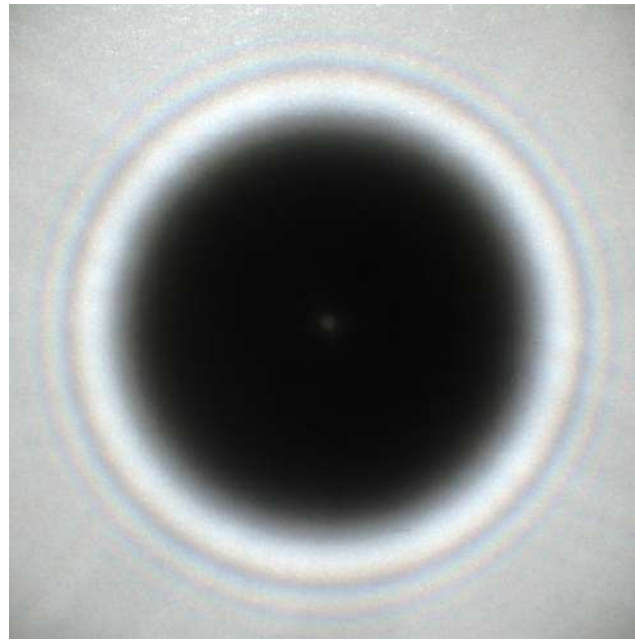


FIGURE 6.3 – La tache de Fresnel-Arago. Image tirée de la page Wikipédia anglaise “Arago spot”

3.1 Régime de Fresnel

On cherche ici à simplifier l’intégrale (6.1) :

Amplitude En ce qui concerne l’amplitude $1/PM$ de l’onde, à grande distance elle varie peu, on peut ne conserver que l’ordre 0 du développement limité, à savoir $\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{OM} \approx \frac{1}{z}$.

Phase Le traitement de la phase est plus délicat, car il fait intervenir une autre longueur : la longueur d’onde λ de la lumière incidente. Allons au second ordre non-nul dans le développement limité de PM , ce qui donne :

$$kPM = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{z^2 + HM^2} = 2\pi \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{HM^2}{z^2}} \approx 2\pi \frac{z}{\lambda} + 2\pi \frac{HM^2}{2\lambda z} - 2\pi \frac{HM^4}{8\lambda z^3}.$$

Contrairement à la fonction $1/x$ pour l’amplitude, la fonction $e^{2i\pi x}$ varie toujours aussi vite quel que soit x , puisque c’est une fonction périodique. Le développement limité doit donc être fait avec précaution. Ainsi, on ne compare pas un terme avec le suivant du développement limité pour savoir lequel domine, mais on doit comparer chaque terme à 2π pour déterminer s’ils vont avoir une influence dans la phase. C’est une situation analogue à celle rencontrée dans le chapitre 2.

Ordres de grandeur Regardons les influences des deux termes d’ordre 1 et 2 en fonction de la taille de l’objet. Si on pose $\lambda = 500$ nm, à quelle distance z chaque terme (adimensionné) sera égal à 1 ? L’ordre 2 pourra être négligé si $z \gg \sqrt[3]{\frac{HM^4}{8\lambda}}$ et l’ordre 1 si $z \gg \frac{HM^2}{2\lambda}$. Le tableau 6.1 donne les approximations qui doivent être vérifiées pour que chaque terme soit négligeable. On remarque que l’ordre 2 est facilement négligeable dans les conditions usuelles de travaux pratiques, nous le négligerons donc par la suite.

	négligeable si	Objet $a = 10 \mu\text{m}$	Objet $a = 1 \text{ mm}$
Ordre 1	$z \gg \frac{HM^2}{2\lambda}$	$z \gg 0,1 \text{ mm}$	$z \gg 1 \text{ m}$
Ordre 2	$z \gg \sqrt[3]{\frac{HM^4}{8\lambda}}$	$z \gg 10 \mu\text{m}$	$z \gg 5 \text{ mm}$

TABLE 6.1 – Comparaison par rapport à 2π des deux premiers ordres du développement limité.

Conditions de Fresnel

Dans ces conditions (dites de Fresnel) où le développement à l'ordre 1 est suffisant, en exprimant HM le champ diffracté devient

$$\underline{E}(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{E_0 e^{ikz}}{z} \iint \underline{t}(x', y') e^{2i\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2\lambda z}} dx' dy'.$$

Notons qu'en séparant les coordonnées (x', y') et (x, y) il est également possible d'exprimer le champ sous la forme ²

$$E(x, y) = E_0 \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2z} \right)} \int \underline{t}(x', y') e^{i \frac{k(x'^2 + y'^2)}{2z}} e^{-i \frac{k(xx' + yy')}{z}} dx' dy'. \quad (6.2)$$

Comme la grandeur d'intérêt est l'intensité lumineuse, nous pouvons sans perte d'information éliminer les termes de phase globale de la formule ci-dessus. Le pré-facteur de l'amplitude se réduit donc à $\frac{E_0}{\lambda z}$.

3.2 Régime de Fraunhofer

Définition

Dans le développement limité du terme de phase et dans l'expression précédente, on voit apparaître un nombre sans dimension caractéristique qui fait intervenir trois longueurs : la taille typique d de l'objet (et de son image), la distance z d'observation et la longueur d'onde de la lumière λ . Ces trois grandeurs sont combinées dans le **nombre de Fresnel** :

$$\mathcal{F} = \frac{d^2}{z\lambda}.$$

Cas $\mathcal{F} \ll 1$ Dans ce cas, le terme $e^{i \frac{k(x'^2 + y'^2)}{2z}}$ de l'équation (6.2) est constant et vaut 1. Le champ diffracté se simplifie :

Conditions de Fraunhofer

Lorsque $\mathcal{F} \ll 1$, on parle de conditions de Fraunhofer, et le champ diffracté devient

$$E(x, y) = \frac{E_0}{\lambda z} \iint \underline{t}(x', y') e^{-2i\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy'$$

où

$$\boxed{f_x = \frac{x}{\lambda z}} \quad \text{et} \quad \boxed{f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$

sont appelées **fréquences spatiales**, elles sont homogènes à l'inverse d'une longueur.

Le champ diffracté est donc proportionnel à la transformée de Fourier de la transparence complexe de l'objet!

$$\boxed{E(M) \propto \hat{t}(P)}.$$

Remarque Les conditions de Fraunhofer en ces termes sont assez contraignantes. En effet, pour une longueur d'onde de 500 nm et un objet de taille typique 1 mm, pour avoir $\mathcal{F} \leq 0,1$, on doit avoir $z \geq 20$ m ! Ce qui est irréalisable en TP. Cependant, nous allons voir une méthode ci-dessous qui élargit considérablement le champ d'utilisation de la formule de Fraunhofer.

2. Ce champ peut également s'écrire sous forme du produit de convolution de la transparence complexe de l'objet $\underline{t}(P)$ par la fonction de Fresnel $h(M)$:

$$E(M) = E_0 \underline{t}(P) \otimes h(M) \quad \text{avec} \quad h(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2z} \right)}.$$

3.3 Diffraction de Fresnel au foyer d'une lentille

Les lentilles « parfaites » ont une fonction de transparence qui dépend de leur distance focale f , et s'écrit :

$$t(x', y') = e^{-2i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{2f\lambda}}.$$

Ainsi lorsqu'une lentille est éclairée par un champ $\underline{E}_0(x', y')$, dans les conditions de Fresnel, le champ diffracté par la lentille vaut

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \iint \underline{E}_0(x', y') e^{ik \left(\frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{x'^2 + y'^2}{2f} - \frac{xx' + yy'}{z} \right)} dx' dy'.$$

Au foyer de la lentille en $z = f$, cette expression se simplifie puisque le terme quadratique est exactement compensé, pour donner une expression identique à celle obtenue dans le régime de Fraunhofer :

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \iint \underline{E}_0(x', y') e^{-ik \left(\frac{xx' + yy'}{f} \right)} dx' dy'.$$

Dans l'expression des fréquences spatiales, on remplace donc la distance z par la distance focale f . Elles deviennent $f_x = \frac{x}{\lambda f}$ et de même pour f_y .

Il suffit donc de placer un objet d'intérêt juste avant la lentille, et on obtient au foyer image l'intensité lumineuse diffractée par cet objet, calculée dans le cadre du régime de Fraunhofer.

Ces conditions de diffraction (Fresnel au foyer d'une lentille) étant beaucoup moins contraignantes que celles de Fraunhofer pour le même résultat, il sera préférable de travailler expérimentalement dans cette configuration. On retiendra :

Régime de Fraunhofer

Le régime de diffraction de Fraunhofer (et donc la formule de Fraunhofer) est valable dans les deux cas suivants :

- si $\mathcal{F} \ll 1$, donc à (très) grande distance de l'objet diffractant ;
- au foyer image d'une lentille convergente.

On retiendra ce résultat remarquable : à un terme de phase près sans importance, *les lentilles permettent donc de faire la transformée de Fourier du champ incident dans leur plan focal image !*

Compétences à maîtriser

- ✓ Utilité du nombre de Fresnel, séparation des différents régimes de diffraction
- ✓ Faire le lien entre diffraction et transformée de Fourier de la transparence de l'objet
- ✓ Connaître les conditions expérimentales pour réaliser une diffraction de Fraunhofer

4 Diffraction par une fente

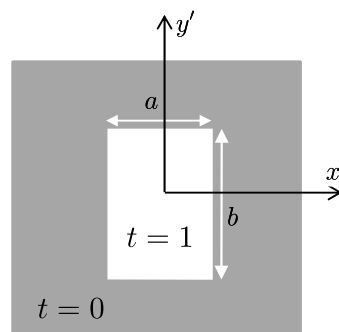


FIGURE 6.4 – Diffraction par une fente rectangulaire de côtés a et b

Plaçons-nous dans les conditions de Fraunhofer et prenons la fente rectangulaire de la figure 6.4 de largeur a et de hauteur b comme objet diffractant. Sa fonction de transparence est donnée par

$$t(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x', y') \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le champ diffracté à grande distance s'écrit donc (toujours avec $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ et $f_y = \frac{y}{\lambda z}$)

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{E_0}{\lambda z} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi(f_x x' + f_y y')} dx' dy' \\ &= \frac{E_0}{\lambda z} \left[\frac{e^{-2i\pi f_x x'}}{-2i\pi f_x} \right]_{-a/2}^{a/2} \times \left[\frac{e^{-2i\pi f_y y'}}{-2i\pi f_y} \right]_{-b/2}^{b/2} \\ &= E_0 \frac{ab}{\lambda z} \operatorname{sinc}(\pi f_x a) \operatorname{sinc}(\pi f_y b) \end{aligned}$$

On en déduit l'intensité en notant $I_0 = \left(E_0 \frac{ab}{\lambda z}\right)^2$ l'intensité au centre de la figure :

$$I(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a) \operatorname{sinc}^2(\pi f_y b).$$

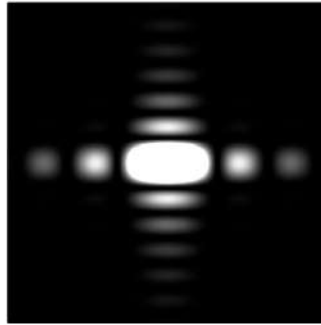


FIGURE 6.5 – Figure de diffraction d'une fente rectangulaire

Le profil d'intensité obtenu sur un écran est représenté sur la figure 6.5. Le pic central a été écrêté pour pouvoir voir les lobes secondaires qui sont 20 fois moins intenses (pour les premiers). Rappelons que les zéros du sinus cardinal sont les $p\pi$, $p \in \mathbb{Z}^*$. L'intensité de l'onde diffractée sera donc nulle pour $x = p \frac{\lambda z}{a}$ et $y = q \frac{\lambda z}{b}$ avec p et q des entiers relatifs non nuls. En $x = 0$ et $y = 0$, la fonction sinc est une forme indéterminée, qui donne 1 avec un développement limité du sinus. La figure fait apparaître des taches lumineuses sur les deux axes du repère. La tache centrale est deux fois plus grande dans les deux directions que toutes les autres taches. C'est une caractéristique classique de la fonction sinc.

On remarque de plus que la figure est plus large que haute, là où l'objet était plus haut que large ($a < b$). La diffraction inverse l'ordre des longueurs : plus un objet est long dans une direction, plus sa figure de diffraction sera condensée dans celle-ci.

On peut réécrire l'intensité lumineuse en fonction des angles définis sur la figure 6.6. On a $\tan \alpha = \frac{x}{z}$ et dans l'autre direction $\tan \beta = \frac{y}{z}$. Ces deux angles, qui définissent la direction de diffraction par rapport à l'axe optique ($O'O$), sont petits dans les conditions de Fraunhofer. On a $\tan \alpha \simeq \alpha$ et $\tan \beta \simeq \beta$ et on peut donc écrire l'expression de l'intensité dans la direction (α, β) :

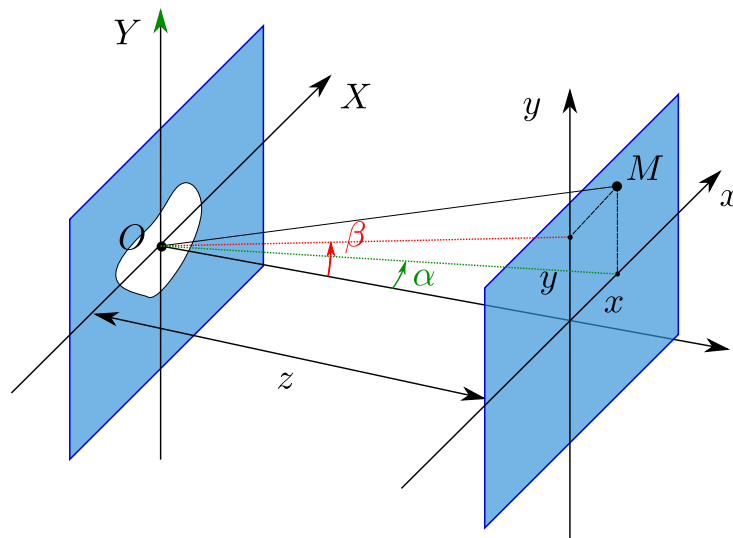
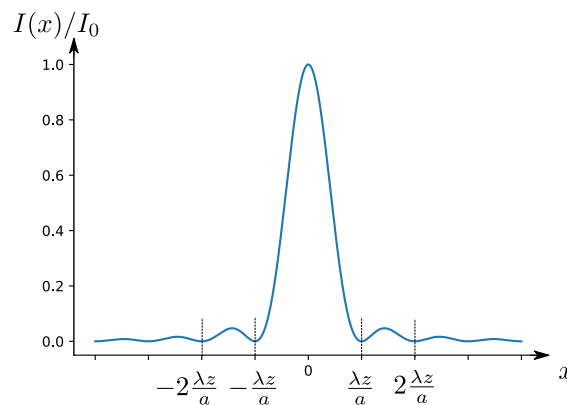
$$I(\alpha, \beta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \alpha\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \beta\right).$$

Passage à une dimension

Intéressons nous au cas où la dimension b de la fente selon y tend vers l'infini. En utilisant la formule précédente, le terme $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \beta\right)$ a le comportement d'une fonction de Dirac $\delta(\beta)$, donc tend vers 0 partout ailleurs qu'en $\beta = 0$. La lumière se propage donc dans la même direction que la direction incidente : $\beta = 0$, on retrouve exactement l'optique géométrique : si la fente est infiniment grande dans la direction y , elle ne diffracte pas dans cette direction. Par conséquent le problème pourra être traité directement à une seule dimension, en sous-entendant qu'on regarde toujours en $y = 0$:

$$I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a).$$

Le profil d'intensité correspondant est représenté sur la figure 6.7.

FIGURE 6.6 – Angles de diffraction α et β FIGURE 6.7 – Intensité diffractée par une fente (1D) de largeur a .

De la diffraction de Fraunhofer à la diffraction de Fresnel Pour compléter cette étude de la diffraction par une fente, la figure 6.8 compare les profils de diffraction pour une fente infiniment longue de côté a , calculés dans le cadre de l'approximation de Fresnel et de Fraunhofer. On garde $\lambda = 500$ nm et $a = 2$ mm constants, et on change la distance d'observation z , donc le coefficient de Fresnel \mathcal{F} . En pointillés verts est dessinée l'ombre géométrique de la fente sur l'écran. On peut noter :

- Les deux calculs donnent des résultats similaires si $\mathcal{F} \ll 1$, comme prévu. L'approximation de Fraunhofer est bonne. On remarque dans ce régime que, la figure de diffraction **est autour** de l'image géométrique de l'objet.
- Lorsque \mathcal{F} grandit et atteint 0,4, la largeur de la tache centrale devient du même ordre de grandeur que l'image géométrique. L'approximation de Fraunhofer commence à être mise à mal.
- En continuant d'augmenter \mathcal{F} , le résultat de la formule de Fraunhofer se met à osciller et diverger. On entre dans le régime de Fresnel et on voit qu'à l'opposé du régime de Fraunhofer la figure de diffraction est à l'**intérieur** de l'image géométrique.
- Dans le cadre de la diffraction de Fresnel ($\mathcal{F} > 1$), le nombre de maxima secondaires à l'intérieur de la figure de diffraction est approximativement égal au nombre de Fresnel.

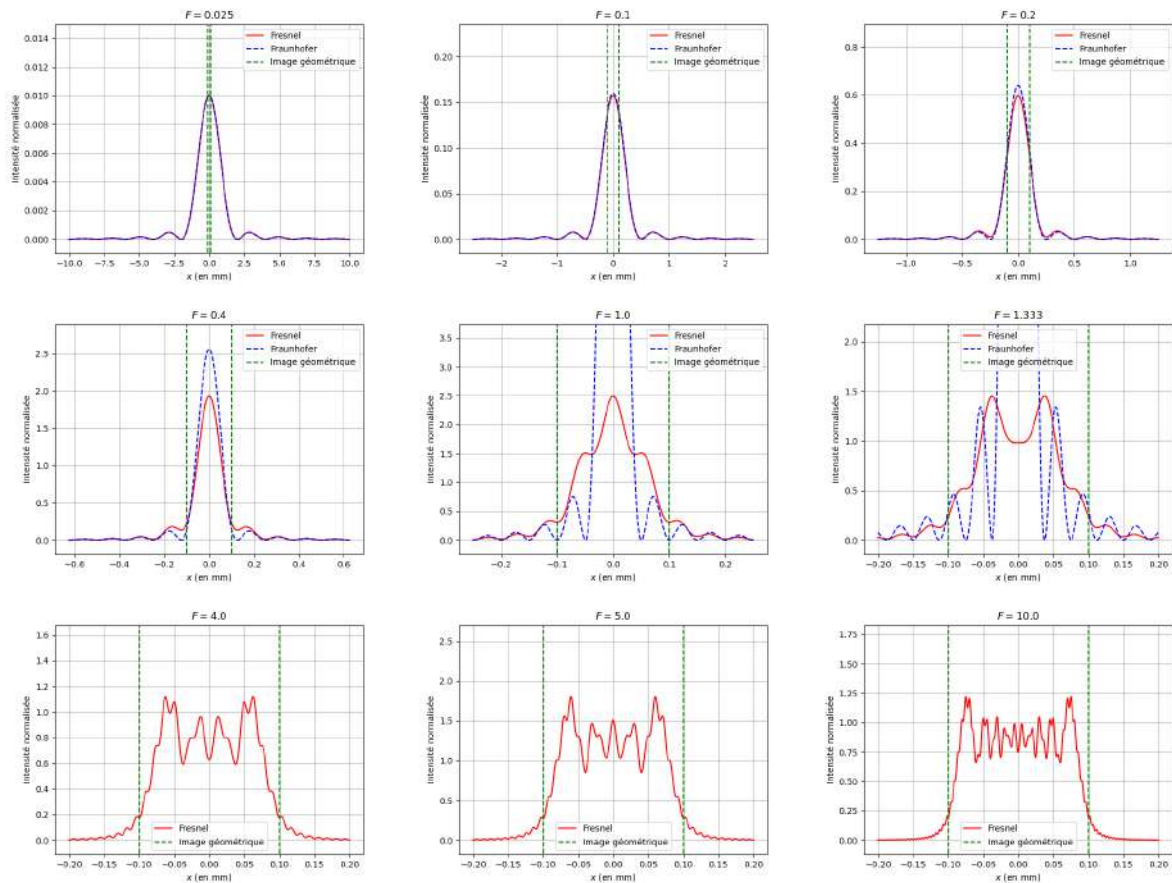


FIGURE 6.8 – Calcul de la diffraction par une fente dans le cadre de l’approximation de Fraunhofer (en bleu) et de celle de Fresnel (en rouge). Les graphes sont tracés pour différents nombres de Fresnel $\mathcal{F} = \frac{a^2}{\lambda z}$. Au-dessus de $\mathcal{F} = 1,33$, le résultat de Fraunhofer est hors de ses conditions d’application et n’est plus représenté. En pointillés vert, l’image géométrique de la fente.

- ✓ Calculer l’intensité diffractée par une fente rectangulaire ;
- ✓ Repérer le passage d’un régime de Fraunhofer à un régime de Fresnel.

5 Diffraction par plusieurs motifs identiques

Dans ce paragraphe, nous travaillerons à une dimension pour alléger les calculs et nous nous placerons dans les conditions de Fraunhofer. Les objets sont éclairés de manière uniforme par une onde plane arrivant en incidence normale. On s’intéresse ici à des objets infiniment longs selon l’axe Oy , nous ne considérerons donc que la coordonnée x

5.1 Diffraction par deux fentes : retour sur l’expérience d’Young

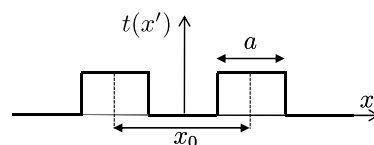


FIGURE 6.9 – Fonction de transparence de deux fentes de taille a espacées de $x_0 > a$

Nous considérerons deux fentes identiques de largeur a (infinies selon y) séparées de la distance x_0 et transparentes :

$$t(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in \left[-\frac{x_0 + a}{2}, -\frac{x_0 - a}{2} \right] \cap \left[\frac{x_0 - a}{2}, \frac{x_0 + a}{2} \right]$$

Le champ diffracté s'écrit donc

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0 \frac{b}{\lambda z} \left(\int_{-\frac{x_0+a}{2}}^{-\frac{x_0-a}{2}} e^{-2i\pi f_x x'} dx' + \int_{\frac{x_0-a}{2}}^{\frac{x_0+a}{2}} e^{-2i\pi f_x x'} dx' \right) \\ &= E_0 \frac{ab}{\lambda z} (e^{-2i\pi f_x x_0} + e^{2i\pi f_x x_0}) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{xa}{\lambda z}\right) \\ &= 2E_0 \frac{ab}{\lambda z} \cos(\pi f_x x_0) \operatorname{sinc}(\pi f_x a). \end{aligned}$$

L'intensité sur l'écran s'écrit

$$I(x) = 4E_0^2 \frac{a^2 b^2}{\lambda^2 z^2} \cos^2(\pi f_x x_0) \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi f_x x_0)] \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a),$$

ou encore

$$I(x) = \underbrace{2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{xx_0}{\lambda z}\right) \right]}_{\text{terme d'interférences}} \underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{xa}{\lambda z}\right)}_{\text{diffraction}}.$$

La fonction $I(x)$ est tracée sur la figure 6.9. Ce résultat doit faire écho au chapitre précédent, où nous avons calculé l'intensité résultante dans l'expérience d'Young, et mis en évidence un effet d'interférence. En effet, on retrouve le même terme d'interférence, on a juste changé les notations ($a \rightarrow x_0$, $D \rightarrow z$). Nous avons fait alors une hypothèse : que les trous (ou fentes) d'Young étaient infiniment fines. Ici on prend explicitement en compte la largeur des fentes, qui donne ce facteur multiplicatif supplémentaire. Si on fait tendre $a \rightarrow 0$, le sinus cardinal s'aplatit, se rapproche d'une fonction uniforme égale à 1, et on retrouve le résultat du chapitre précédent !

Remarquons à nouveau que la plus grande distance dans l'espace réel ($x_0 > a$) donne naissance au phénomène de plus petite taille dans la figure de diffraction (les interférences d'interfrange $\lambda z/x_0$ sont plus fines que la largeur de la tache centrale $\lambda z/a$). Ceci est expliqué par la relation de transformée de Fourier entre la fonction de transparence et l'amplitude diffractée.

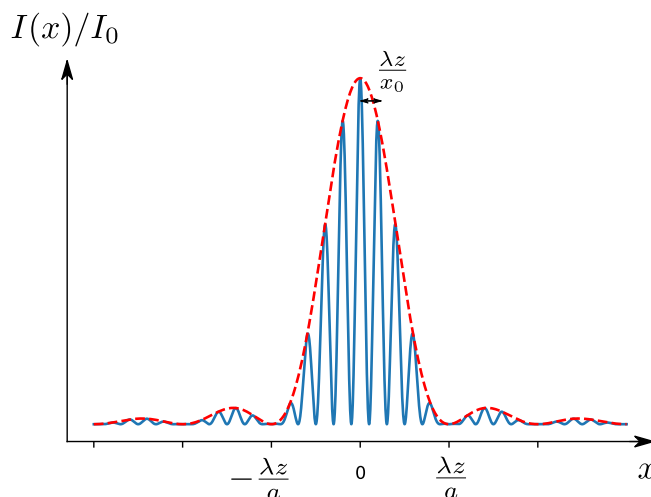


FIGURE 6.10 – Intensité diffractée par deux fentes (1D) de largeur a séparées de la distance x_0 . L'enveloppe en pointillés rouges correspond à l'intensité diffractée par une seule fente.

5.2 Diffraction par une assemblée de motifs identiques

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que faire de la diffraction par deux fentes enrichissait la figure de diffraction d'une fente par la figure d'interférences de deux fentes. Qu'en est-il si on fait de même avec plus de fentes ? Ou avec

plusieurs objets similaires ? Nous allons généraliser le lien trouvé précédemment.

On considère un ensemble de petites structures diffractantes identiques (ou motifs) réparties dans un objet de petite dimension devant z , et éclairé par une onde plane. On étudie la figure de diffraction dans l'approximation de Fraunhofer. Pour repérer un motif, on définit le vecteur $\vec{OP} = (x', y')$ dans le plan de l'objet diffractant. Chaque motif a un centre O_ℓ . Tous les motifs sont identiques, les fonctions de transparence t_ℓ sont donc identiques à une translation près : si $t(P)$ est la fonction de transparence d'un motif centré sur O , la fonction de transparence du motif ℓ centré en O_ℓ vaut $t_\ell(P) = t(P - \vec{OO}_\ell)$. La fonction de transparence totale s'écrit $t_{\text{tot}}(P) = \sum_{1 \leq \ell \leq N} t_\ell(P) = \sum_{1 \leq \ell \leq N} t(P - \vec{OO}_\ell)$.

En posant $\vec{f} = (f_x, f_y)$, l'amplitude diffractée s'écrit

$$\begin{aligned} E_\Sigma(x, y) &= \frac{E_0}{\lambda z} \iint_\Sigma t_{\text{tot}}(P) e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OP}} dS_P = \frac{E_0}{\lambda z} \sum_{1 \leq \ell \leq N} \iint_\Sigma t(P - \vec{OO}_\ell) e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OP}} dS_P \\ &= \frac{E_0}{\lambda z} \sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} \iint t(P') e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OP}'} dS_{P'} \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $P' = P - \vec{OO}_\ell$. L'intégrale ne dépend plus du motif ℓ ! On a ainsi découpé le résultat en un produit de deux facteurs :

$$E_\Sigma(x, y) = \frac{E_0}{\lambda z} \underbrace{\left(\sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} \right)}_{\text{facteur de structure}} \underbrace{\left(\iint t_\ell(P') e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OP}'} dS_{P'} \right)}_{\text{facteur de forme}}.$$

Définition

Le champ et l'intensité diffractée par une assemblée de motifs identiques font apparaître deux termes qui contribuent au résultat global de la figure de diffraction :

- le **facteur de structure** qui est lié à la répartition géométrique des motifs sur le plan diffractant ;
- le **facteur de forme** qui ne dépend que de la forme du motif répété.

L'intensité sur l'écran s'écrit donc :

$$I_N(M) = I_{\text{motif}}(M) \times \left| \sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} \right|^2$$

5.3 Motifs répartis aléatoirement

Supposons pour commencer que les motifs sont répartis de façon aléatoire dans le plan de diffraction, et calculons la partie de l'intensité relative au facteur de structure. En prenant son module carré, on a :

$$\left| \sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} \right|^2 = \sum_{\ell, m} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_m} = \sum_{\ell, m} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{O}_m \vec{O}_\ell}.$$

Cette somme de N^2 termes fait apparaître deux types de facteurs très différents. Ceux pour qui $m = \ell$, qui valent tous 1, et $N^2 - N$ autres qui valent un nombre complexe de module 1 aléatoire. Plus précisément :

$$\left| \sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{OO}_\ell} \right|^2 = N + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq \ell < m \leq N} \cos(-2i\pi \vec{f} \cdot \vec{O}_m \vec{O}_\ell)}_{\text{de moyenne nulle}}.$$

Ainsi les contributions aléatoires à l'intensité s'annulent en moyenne, et l'intensité totale créée par N motifs identiques aléatoirement répartis vaut

$$\boxed{I_N(M) = N I_{\text{motif}}(M)}.$$

5.4 Réseau de fentes

On considère maintenant une répartition périodique : un réseau de N fentes de largeur a , réparties sur une longueur $L = Nx_0$ où x_0 est la période de ce réseau. Calculons l'intensité diffractée par l'ensemble du réseau dans une direction donnée en fonction de l'intensité I_0 , intensité mesurée au centre de la figure pour une fente unique.

Une fois de plus, l'intensité résultante est le produit de l'intensité d'un motif par le module carré du facteur de structure. Dans notre cas, ce dernier s'écrit, si $\overrightarrow{OO_\ell} = (\ell - 1)x_0\vec{e}_x$,

$$\left| \sum_{1 \leq \ell \leq N} e^{-2i\pi \vec{f} \cdot \overrightarrow{OO_\ell}} \right|^2 = \left| \sum_{0 \leq n \leq N-1} e^{-2i\pi f_x x_0 n} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{-2i\pi f_x x_0 N}}{1 - e^{-2i\pi f_x x_0}} \right|^2 = \frac{\sin^2(\pi f_x N x_0)}{\sin^2(\pi f_x x_0)}.$$

À la deuxième ligne, on a fait le changement de variable $p = \ell - 1$. La dernière égalité étant obtenue en factorisant avec l'angle moitié au numérateur et dénominateur. On obtient finalement pour un réseau de fentes rectangulaires :

$$I_N(x) = \frac{\sin^2(\pi f_x N x_0)}{\sin^2(\pi f_x x_0)} \times I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a).$$

Afin de faire ressortir le nombre de fentes N , on réécrit l'intensité sous la forme :

$$I_N(x) = N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a) \times g_N(f_x x_0) \quad \text{où} \quad g_N(u) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi N u)}{\sin^2(\pi u)}.$$

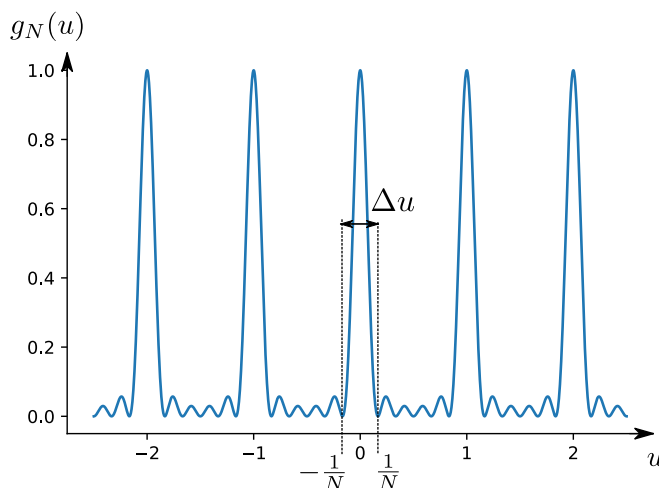


FIGURE 6.11 – Fonction $g_N(u)$

Étude de la fonction $g_N(u)$ Cette fonction continue sur \mathbb{R} , et périodique de période 1. Sur l'intervalle $[0; 1]$, elle a déjà une structure complexe comme le montre la figure 6.11, tracée pour $N = 10$, et présente des maxima principaux, des maxima secondaires, et des annulations. Intéressons nous en particulier aux maxima principaux, aux annulations, et à la largeur de ces maxima.

- **Annulations** : la fonction $g_N(u)$ est nulle dès que son numérateur est nul, c'est-à-dire pour les $u_p = \frac{p}{N}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. SAUF pour un cas particulier, lorsque le dénominateur s'annule également ! Or c'est le cas tous les u_p qui sont des entiers, donc pour les p multiples de N . Finalement, dans l'intervalle $[0; 1]$, la fonction s'annule pour les $u_p = \frac{p}{N}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, donc $N - 1$ fois.
- **Maxima** : un coup d'œil au graphe de $g_N(u)$ confirmé par un calcul de dérivée montre que la fonction a un maximum en $u = 0$, donc en tous les $u = n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ par périodicité. Un développement limité en 0 va nous permettre de trouver la valeur du maximum :

$$g_N(u) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi N u)}{\sin^2(\pi u)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{N^2} \frac{(\pi N u)^2}{(\pi u)^2} = 1.$$

- **Largeur des maxima** On peut estimer simplement la largeur d'un pic par la distance entre les deux premières annulations de part et d'autre de ce pic³ Les premières annulations sont en $\pm 1/N$, donc la largeur du pic est $2/N$.

Interprétation de l'intensité diffractée par un réseau de fentes À la lumière de l'étude de la fonction g_N , revenons sur l'expression de l'intensité diffractée par un réseau :

$$I(x) = N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_x a) \times g_N(f_x x_0)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 6.12. On a trois échelles de distances caractéristiques :

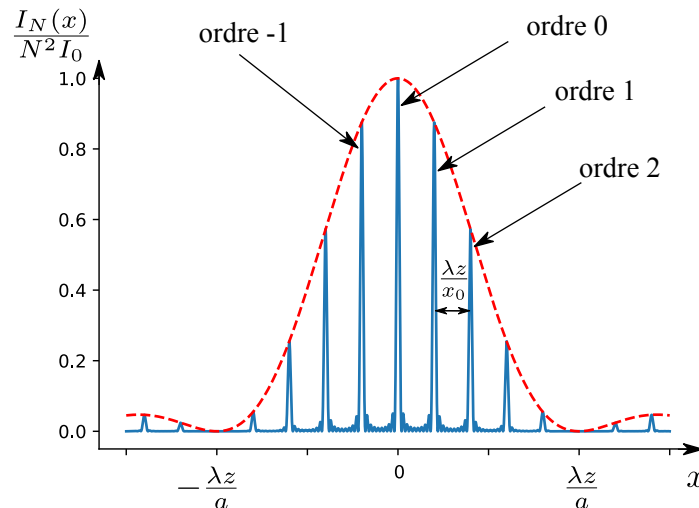


FIGURE 6.12 – Intensité diffractée par un réseau de dix fentes (1D) de largeur a distantes de x_0 . L'enveloppe en pointillés rouges correspond à l'intensité diffractée par une seule fente.

- la largeur de la fonction enveloppe, le sinus cardinal d'une fente seule. Cette largeur est $\lambda z/a$, et on choisit a (taille de la fente) petit pour que le sinus cardinal intervienne peu.
- l'espacement entre les pics : on retrouve les pics de la fonction $g_N(u)$, modulés par la fonction enveloppe. Ces maxima sont appelés **ordres du réseau**. Leur position est $x_m = m \frac{\lambda z}{x_0}$.
- la largeur des pics $\Delta x = \frac{\lambda z}{x_0} \Delta u = \frac{2\lambda z}{N x_0}$, qui va déterminer la résolution du réseau.

Le réseau est un élément essentiel utilisé dans les spectromètres, afin de séparer des longueurs d'onde très proches d'une lumière polychromatique. On utilise pour cela deux choses : (1) la position x_m de l'ordre m dépend de λ ; (2) les pics peuvent être extrêmement fins, et on peut ainsi séparer deux pics proches.

La résolution (ou le pouvoir de résolution) \mathcal{R} du réseau est sa capacité à séparer deux longueurs très proches. On montre que $\mathcal{R} = mN$, c'est donc le produit du nombre de traits éclairés du réseau par l'ordre d'interférence choisi.

Compétences à maîtriser

- ✓ Identifier des facteurs de forme et de structure dans une formule d'intensité diffractée ;
- ✓ Déterminer les positions d'annulation et de maxima d'une fonction telle que $g_N(u)$.

3. On pourrait raffiner en prenant la largeur à mi-hauteur, définition plus conventionnelle, mais qui ne change pas le résultat qualitatif, simplement un facteur 2.

Chapitre 7

Propagation dans les milieux anisotropes

Sommaire

1	Propriétés des ondes dans les milieux anisotropes	155
1.1	Rappel sur la polarisation d'un matériau	155
1.2	Propriétés de la matrice permittivité diélectrique	156
1.3	Onde plane dans un milieu anisotrope transparent	157
2	Propagation selon un axe principal	157
2.1	Étude des lames de phase	157
2.2	Modes de propagation et lignes neutres	158
2.3	Influence d'une lame de phase sur une OPPH polarisée rectilignement	158
3	Propagation selon un axe quelconque	160
3.1	Relation de dispersion et équation de Fresnel	160
4	Onde plane dans un milieu uniaxe	162
4.1	Étude du mode ordinaire	162
4.2	Étude du mode extraordinaire	163
5	Annexe 1 : Surface des indices (*)	164
5.1	Surface des indices	164
5.2	Démonstration de l'équation de la surface des indices	164
6	Annexe 2 : Tracés de rayons lumineux et de vecteurs d'onde (*)	166
6.1	Construction de Descartes	166
6.2	Construction de Huygens	166

Objectifs

Nous avons précédemment étudié la propagation dans les milieux diélectriques linéaires homogènes et isotropes pour le champ électrique (D.L.H.I.). Dans ce chapitre, nous levons la condition d'isotropie du matériau. Après avoir introduit le formalisme relatif aux milieux anisotropes, nous étudierons en détail les milieux uniaxes, et la propagation des ondes électromagnétiques à travers des lames biréfringentes à faces parallèles.

1 Propriétés des ondes dans les milieux anisotropes

1.1 Rappel sur la polarisation d'un matériau

Nous avons vu au chapitre 2 que lorsqu'un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} est appliqué sur un matériau, des dipôles microscopiques sont être induits, ce qui d'un point de vue macroscopique, donne naissance à une densité de moment dipolaire

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}_{\text{ext}}.$$

Précédemment, nous avons supposé le milieu linéaire, à savoir que $[\chi_e] = \chi_e \mathbb{1}$, la matrice susceptibilité se réduit à un scalaire. Cependant, cela n'est vrai que dans les milieux de haute symétrie comme un réseau cubique. Dans un réseau

cristallin triangulaire par exemple, il y a des directions privilégiées, et lors de l'établissement d'un champ électrique, il est fréquent que les liaisons se polarisent plus facilement selon ces axes (dits de *facile polarisation*). Ainsi, le vecteur polarisation induit ne sera donc pas nécessairement aligné avec le champ électrique incident.

Par la suite, nous allons considérer des milieux homogènes ($[\chi_e(\vec{r})] = [\chi_e]$), linéaires ($[\chi_e]$ ne dépend pas de \vec{E}_{ext}) mais anisotropes : $[\chi_e] \neq \chi_e \mathbb{1}$.

1.2 Propriétés de la matrice permittivité diélectrique

Le lien entre le champ électrique \vec{E} et le vecteur déplacement électrique \vec{D} s'écrit

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + [\chi_e])\vec{E} = \varepsilon_0[\varepsilon_r]\vec{E}$$

où on a défini la matrice $[\varepsilon_r]$ de permittivité relative par $[\varepsilon_r] = [\chi_e] + \mathbb{1}$.

Les vecteurs \vec{D} et \vec{E} étant reliés par une relation matricielle, on retiendra qu'en général ils ne sont **pas** colinéaires. Cette propriété est fondamentale dans l'étude des milieux anisotropes.

La conservation de l'énergie dans un milieu transparent impose que la matrice de permittivité diélectrique est symétrique (i.e. $\varepsilon_{r,ij} = \varepsilon_{r,ji}$). Or toute matrice symétrique est diagonalisable dans \mathbb{R} , avec ses valeurs propres réelles. ^{1 2}

Ainsi, pour toute matrice de permittivité $[\varepsilon_r]$, il existe une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice $[\varepsilon_r]$ est diagonale.

Définition

On appelle **axes principaux** du milieu les trois directions orthogonales formées par des vecteurs propres de la matrice $[\varepsilon_r]$. La mention « axes p. » signifiera que la matrice est écrite dans une base propre.

Remarque Cette situation est tout à fait similaire à celle du moment d'inertie en mécanique : le lien entre moment cinétique et vecteur rotation s'écrit $\vec{L} = [I]\vec{\Omega}$ avec $[I]$ une matrice symétrique réelle, avec trois valeurs propres et vecteurs propres qu'on appelle les axes principaux d'inerte.

De plus, comme la relation habituelle des DLHI $n^2 = \varepsilon_r$ devient une relation matricielle $[n^2] = [\varepsilon_r]$, on note dans la base des axes principaux

$$[\varepsilon_r]_{\text{axes p.}} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}.$$

avec n_x^2, n_y^2 et n_z^2 des coefficients réels à interpréter. Si une des valeurs propres n_i^2 n'est pas strictement positive alors on dit que le matériau est **dichroïque** ce qui correspond à une anisotropie d'atténuation. Certaines directions de champ électrique seront atténuées, d'autres non. C'est ainsi que fonctionnent les polariseurs. Dans la suite, sauf mention explicite contraire on supposera le milieu non absorbant donc transparent, et avec tous les $n_i^2 > 0$.

Définition

On donne des noms différents aux milieux selon l'égalité entre valeurs propres de cette matrice :

- si $n_x = n_y = n_z$, le milieu est isotrope.
- si deux valeurs propres sont égales, le milieu est dit **uniaxe**. Les deux valeurs communes sont notées n_o pour indice **ordinaire** et le troisième n_e pour indice **extraordinaire** ;
- si elles sont toutes différentes, le milieu est dit **biaxe**.

De manière générale, un milieu non isotrope est dit **biréfringent** (même s'il est **uniaxe**, cette nomenclature s'expliquera

1. Il s'agit ici d'une restriction : on sait bien que ε peut être complexe, comme dans les conducteurs. En toute généralité, il serait plus juste de dire que $[\varepsilon_r]$ est une matrice hermitienne, donc diagonalisable à valeurs propres réelles.

2. Les vecteurs propres (ou états propres) correspondant à trois polarisations orthogonales du champ électrique \vec{E} . S'ils sont réels, ils correspondent à des polarisations linéaires et on parle d'**anisotropie linéaire** ; s'ils sont complexes, ils peuvent correspondre à des polarisations circulaires, on parle d'anisotropie circulaire du matériau. Ces deux types d'anisotropie peuvent exister en même temps dans les matériaux ; les états propres sont alors elliptiques.

par la suite).

Quel est l'indice vu par une onde se propageant dans un milieu ? Nous allons voir que ça dépend de sa direction de propagation et de sa direction de polarisation.

1.3 Onde plane dans un milieu anisotrope transparent

On s'intéresse à la propagation d'une OPPH $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ dans un milieu non magnétique ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$), transparent, sans charge libre (i.e. $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$). On s'intéresse à des vecteurs d'onde réels dans ce chapitre.

1.3.1 Équations de Maxwell

Dans ces conditions les équations de Maxwell s'écrivent :

	Équation générale	Cas des OPPH
(MG)	$\text{div } \vec{D} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$
(MA)	$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$i \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \mu_0 \omega \vec{D}$
(MF)	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$
(MT)	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

On retrouve des propriétés générales des champs, vraies dans les milieux isotropes comme biréfringents :

- (MG et MT) Les champs \vec{D} et \vec{B} sont transverses (orthogonaux à la direction de propagation) ;
- (MF) Les champs \vec{B} et \vec{E} sont reliés par la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, donc \vec{B} est orthogonal au plan (\vec{k}, \vec{E}) .
- (MA) donne une relation similaire entre \vec{B} et \vec{D} cette fois : $\vec{D} = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \omega}$. Puisque \vec{D} et \vec{B} sont transverses et orthogonaux entre eux, le trièdre $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$ est un trièdre direct.

Attention, dans un milieu biréfringent \vec{D} et \vec{E} ne sont pas nécessairement colinéaires, donc en général le champ électrique \vec{E} n'est pas orthogonal à \vec{k} . Le champ \vec{E} n'est pas transverse !

1.3.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting s'écrit ³

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2 \vec{k} - (\vec{E} \cdot \vec{k}) \vec{E}}{\mu_0 \omega}.$$

Cette fois le second terme est en général non-nul. Le vecteur $\vec{\Pi}$ n'est donc pas en général parallèle au vecteur d'onde \vec{k} . Rappelons que

- le vecteur d'onde \vec{k} est le vecteur qui donne la *direction de propagation de l'OPPH*. Il est orthogonal aux plans d'onde.
- le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est le vecteur qui donne la *direction de propagation de l'énergie* et donne donc la direction des rayons lumineux.

Ainsi contrairement à ce qui se passe dans les milieux isotropes, les plans d'onde ne sont plus orthogonaux aux rayons lumineux, la direction de l'onde est différente de la direction de l'énergie !

2 Propagation selon un axe principal

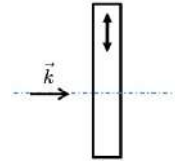
2.1 Étude des lames de phase

On applique les résultats de la partie précédente au cas spécifique d'une incidence normale, sur un milieu uniaxe tel que l'axe optique est perpendiculaire à la direction de propagation.

3. Rappelons que $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$.

Définition

Une **lame de phase** est une lame à faces parallèles taillée dans un milieu uniaxe de sorte que son axe optique (représenté par une double flèche sur le schéma ci-contre) soit parallèle à ses faces. On l'éclaire avec une OPPH se propageant orthogonalement à ses faces. Le vecteur d'onde \vec{k} de l'onde est donc colinéaire à un des axes propres ordinaires de la lame (cf. schéma ci-contre).



On prendra l'axe de propagation selon \vec{e}_z et l'axe optique de la lame selon \vec{e}_y .

2.2 Modes de propagation et lignes neutres

On reprend les équations précédentes avec $\cos \theta = 0$. L'équation de Fresnel et le système (7.1) se simplifient nettement, puisque la matrice (7.1) devient diagonale. On obtient

Mode ordinaire : $n = n_o$

$$\vec{E}_o = \underline{E}_o e^{i(\omega t - n_o k_0 z)} \vec{e}_x, \quad \vec{D}_o = \varepsilon_0 n_o^2 \vec{E}_o, \quad \vec{B}_o = B_o \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_o // \vec{k}.$$

Mode extraordinaire : $n = n_e$

$$\vec{E}_e = \underline{E}_e e^{i(\omega t - n_e k_0 z)} \vec{e}_y, \quad \vec{D}_e = \varepsilon_0 n_e^2 \vec{E}_e, \quad \vec{B}_e = B_e \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_e // \vec{k}.$$

Avec cette incidence, le mode extraordinaire se rapproche du mode ordinaire : le champ \vec{E}_e est lui aussi parallèle à \vec{D}_e , et on retrouve donc un champ transverse, et une propagation de l'énergie colinéaire à celle de l'onde.

Les deux modes ordinaire et extraordinaire se propagent dans la même direction mais avec des vitesses différentes. Si $n_e > n_o$ l'axe ordinaire est l'axe **rapide** et l'axe extraordinaire l'axe **lent** : le milieu est dit positif.

2.3 Influence d'une lame de phase sur une OPPH polarisée rectilignement**2.3.1 Cas général**

Supposons qu'une OPPH polarisée rectilignement arrive en incidence normale sur la lame vue précédemment, d'épaisseur e . Avant la lame le champ électrique s'écrit en notation complexe

$$\vec{E} = E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec α un angle quelconque.

Propagation selon une ligne neutre Si l'onde incidente est polarisée dans la direction $\alpha = 0$ ou $\pi/2$, elle se propagera en conservant sa polarisation rectiligne, quelle que soit l'épaisseur de la lame. On dit qu'elle se propage selon les lignes neutres de la lame.

Définition

On appelle **lignes neutres** d'une lame à faces parallèles en incidence normale les directions telles qu'un champ électrique incident polarisé dans cette direction restera polarisé rectilignement dans cette direction.

Ces lignes neutres sont les directions des modes propres (ordinaire et extraordinaire) du milieu, qui correspondent également aux axes principaux de la lame.

Remarque Il est possible d'étendre la notion de « ligne neutre » lorsque l'onde incidente ne se propage pas de façon normale à l'interface. Cependant, cela a peu d'intérêt expérimental, de plus les lignes neutres dépendent alors de la direction de propagation \vec{u} ; contrairement aux axes optiques qui sont caractéristiques d'un milieu.

Cas général On choisit l'origine des phases à l'entrée de la lame en $z = 0$. Pour étudier la propagation de ce champ dans la lame il suffit de décomposer le champ sur les deux modes qui sont portés par les vecteurs propres \vec{e}_x et \vec{e}_y . À l'intérieur de la lame dans le plan $z = z_0$ le champ électrique s'écrit alors (avec $k_0 = \omega/c$)

$$\vec{E} = E_0 \cos \alpha e^{i(n_o k_0 z_0 - \omega t)} \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha e^{i(n_e k_0 z_0 - \omega t)} \vec{e}_y.$$

Cette expression peut être factorisée sous la forme

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \cos \alpha e^{in_o k_0 z_0} \\ \sin \alpha e^{in_e k_0 z_0} \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 e^{i(n_o k_0 z_0 - \omega t)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\Delta n k_0 z_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\Delta n = n_e - n_o$ est appelée **biréfringence du matériau**. Ainsi, à la sortie de la lame en $z = e$, les deux composantes sont déphasées de

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta n \frac{e}{\lambda}.$$

Le déphasage sera positif si l'axe (Oy) est l'axe lent (onde qui se propage avec l'indice le plus élevé) et négatif si l'axe (Oy) est l'axe rapide (onde qui se propage avec l'indice le plus petit). Généralement, on ne sait pas *a priori* lequel est l'axe lent et lequel est l'axe rapide, on s'intéresse donc uniquement à $|\Delta\varphi|$.

L'onde sortante est par défaut polarisée elliptiquement. On peut néanmoins choisir l'épaisseur e de la lame pour que les ondes d'une longueur d'onde particulière ressortent avec une polarisation particulière.

En posant $\omega t' = \omega t - n_o k_0 z_0$ (changement d'origine des temps), on aura en notation complexe :

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t'} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\Delta\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque La lame est considérée comme non absorbante, et on néglige les effets de réflexion et transmission aux interfaces. Ainsi l'intensité $I = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = E_0^2$ est inchangée entre l'entrée et la sortie de la lame.

2.3.2 lame demi-onde

Définition

Une lame est dite **demi-onde** si elle introduit un déphasage $\Delta\varphi = \pi + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ entre les deux composantes de l'OPPH.

Le nom « demi-onde » vient du fait que la lame a une différence d'épaisseur optique $e\Delta n$ entre ses deux lignes neutres égale à $(2p + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Les lames demi-ondes sont calibrées pour une longueur d'onde donnée.

En sortie de la lame le champ s'écrit en notation complexe

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t'} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'onde est donc polarisée rectilignement mais dans une direction différente de l'onde incidente. Plus précisément, si la polarisation fait un angle α avec une ligne neutre, la polarisation sortante aura tournée de 2α . Les lames demi-onde sont en effet généralement utilisées pour contrôler la direction de vibration (rectiligne) des ondes.

Remarque On pourra vérifier qu'une lame demi-onde inverse le sens de rotation d'une onde polarisée circulairement.

2.3.3 lame quart d'onde

Définition

Une lame est dite **quart d'onde** pour une OPPH si elle introduit un déphasage $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ entre les deux modes de propagation.

Le nom « quart d'onde » vient du fait que la lame a une différence d'épaisseur optique $e\Delta n$ entre ses deux lignes neutres égale à $(2p + 1)\frac{\lambda}{4}$.

En sortie de la lame le champ s'écrit en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-i\omega t'} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \pm i \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'onde est polarisée elliptiquement. Cependant si l'onde incidente est rectilignement polarisée à 45° des lignes neutres de la lame (i.e. $\alpha = \frac{\pi}{4}$) alors les amplitudes des deux composantes sont identiques, et l'onde ressort polarisée circulairement :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 e^{i(\omega t - n_o k_0 e)} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inversement une onde incidente polarisée circulairement ressortira d'une lame quart d'onde polarisée rectilignement avec une direction de polarisation faisant un angle de 45° avec les axes propres de la lame.

2.3.4 Polariseurs dichroïques

Pour conclure, on étend le raisonnement précédent sur les lames transparentes au cas des polariseurs, possédant une valeur propre $\varepsilon_{r,i}$ négative. La matrice de permittivité du milieu s'écrit alors

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_o^2 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit des conditions d'étude de la lame de phase avec un indice extraordinaire qui est maintenant imaginaire pur $n_e = i\gamma$.

On éclaire cette lame avec une OPPH polarisée rectilignement telle que son champ électrique s'écrive en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À l'intérieur de la lame dans le plan $z = z_0$ le champ électrique s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cos \alpha e^{i(n_o k_0 z_0 - \omega t)} \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha e^{-\gamma k_0 z_0} e^{-i\omega t} \vec{e}_y.$$

Ainsi, après quelques $\frac{1}{\gamma k_0}$, l'amplitude du champ selon l'axe (Oy) va tendre vers zéro de sorte qu'à la sortie de la lame le champ s'écrit

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cos \alpha e^{i(n_o k_0 e - \omega t)} \vec{e}_x.$$

Ce système est donc un polariseur qui utilise le phénomène d'anisotropie d'absorption appelé **dichroïsme**. On parle alors de **polariseur dichroïque**, des matériaux popularisés par l'entreprise Polaroid®.

Compétences à maîtriser

- ✓ Démontrer l'expression du déphasage dans une lame de phase pour une onde incidente polarisée rectilignement et arrivant perpendiculairement à l'interface.
- ✓ Connaître l'effet sur une onde incidente polarisée rectilignement et l'intérêt des lames demi-onde, quart-d'onde et des polariseurs.

3 Propagation selon un axe quelconque

3.1 Relation de dispersion et équation de Fresnel

Rappelons le cas simple des DLHI : si une onde se propage dans la direction \vec{u} , on écrit $\vec{k} = n\frac{\omega}{c}\vec{u}$. La propagation de l'onde se déroule comme dans le vide avec un indice n supplémentaire : le champ $\underline{\vec{E}}$ est transverse au vecteur \vec{k} , $\vec{\Pi}$ est colinéaire à \vec{k} ; la propagation est identique pour les deux directions de polarisation du champ électrique.

On pose $\vec{k} = k\vec{u}$, et $k = n_u k_0$ avec $k_0 = \omega/c$, le vecteur d'onde dans le vide. Le coefficient n_u , qui est la définition de l'indice dans un milieu isotrope, quantifie ainsi la différence par rapport à la propagation dans le vide. La vitesse de phase de l'onde est par définition $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_u}$.

L'objectif de la suite est de déterminer, pour une direction de propagation \vec{u} donnée, les indices n_u que voit l'onde. Pour cela, on écrit le vecteur \vec{D} de deux façons. D'abord, avec la relation $\vec{D} = \varepsilon_0[\varepsilon_r]\vec{E}$ qui contient les contraintes du milieu, et ensuite grâce aux équations de Maxwell :

$$\vec{D} = -\frac{\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega^2} = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}] = \frac{n_u^2}{c^2 \mu_0} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}].$$

On obtient ainsi une équation pour n qui s'écrit dans la base propre du milieu :

$$\begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}_{\text{axes p.}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = n_u^2 \begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1 - \beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1 - \gamma^2 \end{pmatrix}_{\text{axes p.}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

avec $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ les coordonnées du vecteur qui représente la direction de propagation de l'onde incidente. Cette équation aura une solution non nulle si et seulement le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} n_x^2 - n^2(1 - \alpha^2) & \alpha\beta n^2 & \alpha\gamma n^2 \\ \alpha\beta n^2 & n_y^2 - n^2(1 - \beta^2) & \beta\gamma n^2 \\ \alpha\gamma n^2 & \beta\gamma n^2 & n_z^2 - n^2(1 - \gamma^2) \end{vmatrix} = 0.$$

On ne résoudra pas ce système dans le cas général mais on peut vérifier qu'il conduit à une équation du second degré en n^2 appelée **équation de Fresnel**. Cette équation possède quatre solutions réelles ($\pm n_I$ et $\pm n_{II}$) qui dépendent de la direction de propagation de l'onde incidente c'est-à-dire de \vec{u} ; le signe \pm correspond au sens de propagation.

Modes de propagation dans un milieu biréfringent Pour une direction de propagation \vec{u} donnée :

- il existe deux indices n_I et n_{II} qui sont solutions de l'équation de Fresnel, et donc deux vitesses de phase pour une pulsation donnée : $v_{\phi,I} = \frac{c}{n_I}$ et $v_{\phi,II} = \frac{c}{n_{II}}$;
- en résolvant le système, on montre qu'à chaque indice est associé un vecteur déplacement électrique différent, ils sont notés \vec{D}_I et \vec{D}_{II} . Ces deux vecteurs sont orthogonaux entre eux.
- Ces deux couples (n_I, \vec{D}_I) et (n_{II}, \vec{D}_{II}) sont appelés les **modes** de propagation. Contrairement à la propagation dans un milieu isotrope, la polarisation de l'onde influence sa propagation.

Si une onde incidente de direction \vec{u} arrive avec un vecteur \vec{D} quelconque (mais nécessairement perpendiculaire à \vec{u}), on décompose \vec{D} selon la base $(\vec{D}_I, \vec{D}_{II})$. L'onde se scinde alors en deux, puisque chaque composante ira à une vitesse différente avec un indice différent. En particulier les deux composantes se déphasent l'une par rapport à l'autre.

Ainsi, en se propageant dans le milieu anisotrope selon une direction \vec{u} , on observe un phénomène de « dédoublement » de l'onde qui est appelé **biréfringence**.

Définition

Pour une direction de propagation \vec{u} donnée, l'équation de Fresnel donne les indices optiques vus par l'onde dans le milieu. De façon générale, cette équation donne deux solutions n_I et n_{II} . Il existe cependant une ou deux directions pour lesquelles $n_I = n_{II}$. Ces directions sont appelées **axes optiques** du milieu. ^a

Un milieu possédant un unique axe optique est dit **uniaxe**, s'il en possède deux il est dit **biaxe**.

De façon générale, les axes optiques d'un milieu biaxe ne sont **pas** orthogonaux.

Lorsqu'une onde se déplace selon un axe optique, elle ne voit qu'un seul indice, la propagation est donc identique à celle dans un milieu isotrope d'indice n identique, quelle que soit sa polarisation.

a. Attention, cette définition est totalement décorrélée de l'« axe optique du système ».

On peut démontrer que si le milieu est tel que toutes les valeurs propres $\varepsilon_{r,i}$ sont différentes, alors le milieu est biaxe. Si le milieu possède deux valeurs propres identiques, alors il est uniaxe, et l'axe optique est orienté selon la direction extraordinaire du milieu.

Propagation dans un milieu biréfringent

On retiendra donc, que dans un milieu biréfringent :

- Les vecteurs \vec{D} et \vec{E} ne sont pas colinéaires en général, de même pour $\vec{\Pi}$ et \vec{k} .
- À chaque direction de propagation \vec{u} correspond deux indices optiques vus par l'onde, déterminés par l'équation de Fresnel. Deux indices, donc deux vitesses de propagation et deux vecteurs \vec{D} possibles.
- Les axes optiques sont les directions particulières du matériau pour lesquelles, lorsque l'onde se déplace selon celle-ci, elle se propage comme dans un milieu isotrope.
- Un milieu uniaxe (avec deux indices principaux égaux) a un seul axe optique.

Compétences à maîtriser

- ✓ Identifier les différences entre la propagation dans un milieu isotrope et biréfringent.
- ✓ Connaître le principe de la détermination des indices optiques vus par une OPPH.
- ✓ Connaître la définition des axes optiques d'un milieu biréfringent, et leur spécificité.

4 Onde plane dans un milieu uniaxe

Le but de ce paragraphe est de résoudre l'équation de Fresnel dans le cas particulier des milieux uniaxes. Le matériau possédant une anisotropie linéaire uniaxe, nous choisissons le repère $(Oxyz)$ de sorte que sa matrice de permittivité relative s'écrive

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$$

où n_o et n_e sont les indices ordinaire et extraordinaire du matériau.

Remarquons que si l'onde incidente se propage selon l'axe (Oz) , quel que soit son vecteur \vec{D} (orthogonal à \vec{u}), elle ne « verra » pas l'anisotropie du matériau puisque les deux modes de propagation ont le même indice. On retrouve que l'axe principal extraordinaire (ici (Oz)) est un axe optique du matériau (et le seul).

Notre système possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) , on peut faire une rotation de la base xOy de telle sorte que la direction de propagation soit uniquement selon x et z , et ainsi écrire

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

L'équation de Fresnel s'écrit

$$\begin{vmatrix} n_o^2 - n^2 \sin^2 \theta & 0 & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & n_o^2 - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & n_e^2 - n^2 \cos^2 \theta \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient deux solutions

$$n_I = n_o \quad \text{ou} \quad n_{II} = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}}.$$

4.1 Étude du mode ordinaire

Ce mode voit l'indice $n_I = n_o$ quel que soit l'angle d'incidence θ de l'onde (et donc la direction de propagation \vec{u}). En résolvant le système (7.1) on trouve que le champ électrique est polarisé selon \vec{e}_y (si $n_o \neq n_e$, cas qui nous intéresse). On notera $\vec{E}_o = E_o \vec{e}_y$.

Rappelons que $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$, $\vec{B} = n \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ et $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. On en déduit donc directement les champs

$$\vec{D}_o = \varepsilon_0 n_o^2 E_o \vec{e}_y, \quad \vec{B}_o = \frac{n_o E_o}{c} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_o = \frac{n_o E_o^2}{\mu_0 c} \vec{u}.$$

Pour ce mode, le champ électrique \vec{E}_o est colinéaire à \vec{D}_o , donc orthogonal au vecteur d'onde \vec{k} et par conséquent le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_o$ est lui colinéaire à \vec{k} ce qui signifie que l'onde et l'énergie qu'elle contient se propagent dans la même direction. La situation pour cette polarisation est tout à fait similaire à la propagation d'une onde dans un milieu isotrope d'indice n_o .

On pourra remarquer que l'onde ordinaire est polarisée perpendiculairement à l'axe optique. Ce résultat est tout à fait général pour les milieux uniaxes.

4.2 Étude du mode extraordinaire

Ce mode voit l'indice $n_{II} = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}}$ qui dépend de l'angle d'incidence θ de l'onde. En résolvant le système (7.1), on trouve que le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_e = a_e \begin{pmatrix} -n_e^2 \sin \theta \\ 0 \\ n_o^2 \cos \theta \end{pmatrix},$$

avec a_e une valeur liée à la norme du champ. On en déduit ensuite les champs

$$\vec{D}_e = a_e n_e^2 n_o^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_e = -\frac{n_o^2 n_e^2 a_e}{c} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_e = \frac{a_e^2 n_o^2 n_e^2}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} n_o^2 \cos \theta \\ 0 \\ n_e^2 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Dans ce mode, le vecteur d'onde \vec{k} n'est pas orthogonal au champ électrique \vec{E}_e et n'est pas colinéaire au vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_e$. La phase et l'énergie de l'onde ne se propagent donc pas dans la même direction.

Remarquons qu'une OPPH incidente de polarisation quelconque donnera naissance aux deux modes précédents au cours de sa propagation dans le matériau et donc à deux rayons lumineux se propageant dans deux directions différentes : l'un selon $\vec{\Pi}_o$ et l'autre selon $\vec{\Pi}_e$ (cf. figure 7.1). Les deux composantes de la polarisation se propageant de façon différente, la polarisation globale de l'onde est donc modifiée.

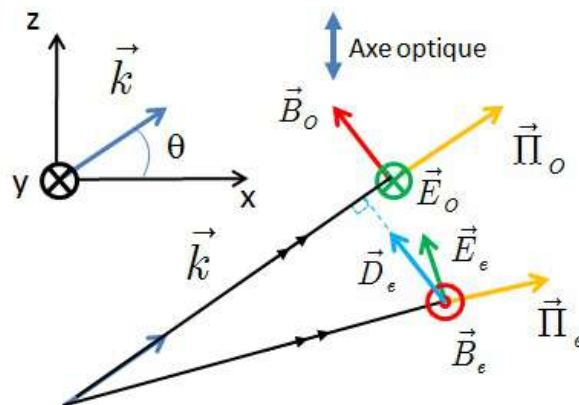


FIGURE 7.1 – Représentation des modes ordinaire et extraordinaire dans un milieu anisotrope uniaxe dont l'axe optique est (Oz).

Remarque Nous avons considéré un milieu infini. En réalité, il faut tenir compte de la réfraction à l'interface entre le milieu anisotrope et l'extérieur. Le milieu anisotrope comprenant plusieurs indices, il y a donc plusieurs vecteurs d'onde à considérer. La construction de ces vecteurs d'ondes et rayons réfractés est abordée dans l'annexe 2.

Compétences à maîtriser

- ✓ Connaître les différences qualitatives entre les modes ordinaire et extraordinaire.

5 Annexe 1 : Surface des indices (★)

5.1 Surface des indices

On rappelle que $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est le vecteur directeur de la propagation de l'onde.

Définition

On appelle *surface des indices* le lieu géométrique des points M tels que $\overline{OM} = n\vec{u}$, où n est la valeur de l'indice optique dans la direction \vec{u} , obtenu en résolvant l'équation de Fresnel.

Cette surface donne donc, pour chaque direction, la valeur des indices optiques suivant cette direction (à la manière du diagramme de rayonnement, qui donne la norme du vecteur de Poynting dans une direction donnée)

On note $x = n\alpha, y = n\beta, z = n\gamma$ les coordonnées du vecteur \overline{OM} . L'équation de la surface des indices, c'est-à-dire la relation entre x, y et z est donnée par (démonstration en annexe à la fin du chapitre) :

$$x^2 n_x^2 (n_y^2 - n^2)(n_z^2 - n^2) + y^2 n_y^2 (n_x^2 - n^2)(n_z^2 - n^2) + z^2 n_z^2 (n_x^2 - n^2)(n_y^2 - n^2) = 0$$

Pour un milieu biréfringent, la surface est assez complexe car elle est constituée de deux nappes imbriquées qui se croisent. Les points de croisement correspondent à des directions de propagation selon lesquelles une seule onde se propage avec un indice unique, comme dans un milieu isotrope. Ce sont les directions des axes optiques du milieu.

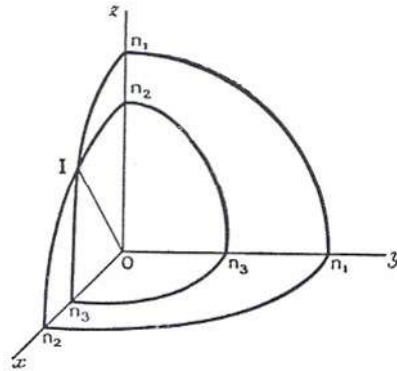


FIGURE 7.2 – Portion de la surface des indices sur 1/8 de l'espace. On peut reconstruire l'ensemble de la surface en faisant l'image par réflexion par rapport à chacun des plans du repère.

Sur la figure 7.2, l'axe OI est un axe optique. La plupart des matériaux utilisés en optique présentent des propriétés de symétrie telles qu'ils sont uniaxes. Dans ce cas, les surfaces des indices sont une sphère et un ellipsoïde. Les deux surfaces sont tangentes en leurs points d'intersection avec l'axe optique (voir la figure 7.3).

5.2 Démonstration de l'équation de la surface des indices

Pour les champs de la forme : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ et $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ On repère l'orientation dans l'espace de chacun des champs pour trois coefficients :

$$\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \beta_E \\ \gamma_E \end{pmatrix} \quad \text{et de façon analogue} \quad \vec{D}_0 = E_0 \begin{pmatrix} \alpha_D \\ \beta_D \\ \gamma_D \end{pmatrix}.$$

Dans le repère principal, pour la composante x , on a : $D_x = \epsilon_0 n_x^2 E_x$, soit en faisant apparaître les cosinus directeurs de chaque composante : $D_0 \alpha_D = \epsilon_0 n_x^2 E_0 \alpha_E$ et finalement :

$$\frac{D_0}{E_0} = \epsilon_0 n_x^2 \frac{\alpha_E}{\alpha_D}$$

En calculant le même rapport pour les composantes y et z des champs, on obtient une première relation :

$$n_x^2 \frac{\alpha_E}{\alpha_D} = n_x^2 \frac{\beta_E}{\beta_D} = n_x^2 \frac{\gamma_E}{\gamma_D}.$$

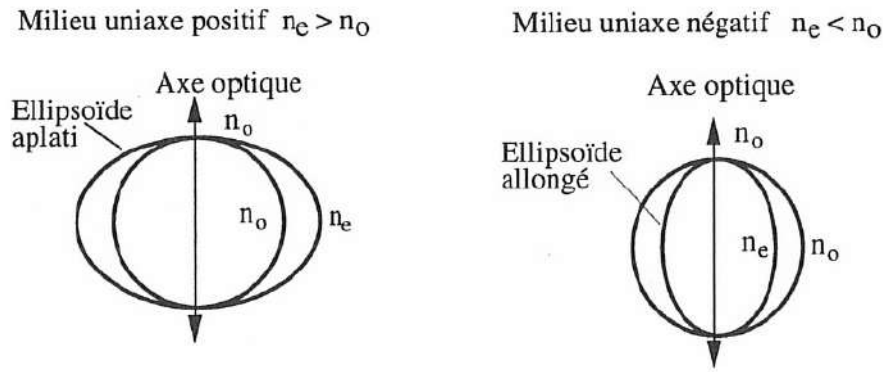


FIGURE 7.3 – Coupe de la surface des indices d'un milieu uniaxe dans un plan passant par l'axe optique (figure adaptée du Manuel d'optique de G. Chartier). Les deux surfaces présentent un symétrie cylindrique autour de l'axe optique.

On peut également exploiter l'équation séculaire en faisant apparaître explicitement les cosinus directeurs. Pour la première ligne de l'équation :

$$(n_x^2 - n^2(1 - \alpha^2))\alpha_E + \alpha\beta n^2\beta_E + \alpha\gamma n^2\gamma_E = 0$$

soit

$$(n_x^2 - n^2)\alpha_E = -n^2\alpha(\alpha\alpha_E + \beta\beta_E + \gamma\gamma_E) = -n^2\alpha\vec{u} \cdot \vec{u}_E.$$

De façon similaire à partir des seconde et troisième lignes de l'équation séculaire on obtient :

$$(n_x^2 - n^2)\beta_E = -n^2\beta\vec{u} \cdot \vec{u}_E$$

$$(n_x^2 - n^2)\gamma_E = -n^2\gamma\vec{u} \cdot \vec{u}_E.$$

On peut ainsi établir une seconde équation :

$$(n_x^2 - n^2)\frac{\alpha_E}{\alpha} = (n_x^2 - n^2)\frac{\beta_E}{\beta} = (n_x^2 - n^2)\frac{\gamma_E}{\gamma}.$$

En divisant cette relation par la première, on obtient :

$$\frac{(n_x^2 - n^2)\alpha_D}{n_x^2\alpha} = \frac{(n_y^2 - n^2)\beta_D}{n_x^2\beta} = \frac{(n_z^2 - n^2)\gamma_D}{n_x^2\gamma} = C$$

où C est une constante. Cette relation permet d'obtenir trois relations faisant apparaître le produits des cosinus directeurs de \vec{u} et de \vec{u}_D :

$$\alpha\alpha_D = C\frac{\alpha^2 n_x^2}{n_x^2 - n^2}; \beta\beta_D = C\frac{\alpha^2 n_y^2}{n_y^2 - n^2}; \gamma\gamma_D = C\frac{\alpha^2 n_z^2}{n_z^2 - n^2}.$$

Pour obtenir l'équation de la surface des indices, on exprime que le vecteur excitation électrique est orthogonal à la direction de propagation : \vec{k} et \vec{D} sont perpendiculaires donc $\vec{u} \cdot \vec{u}_D = 0$

$$\alpha\alpha_D + \beta\beta_D + \gamma\gamma_D = 0$$

et en remplaçant avec les expressions trouvées précédemment on obtient :

$$\frac{\alpha^2 n_x^2}{n_x^2 - n^2} + \frac{\beta^2 n_y^2}{n_y^2 - n^2} + \frac{\gamma^2 n_z^2}{n_z^2 - n^2} = 0.$$

En multipliant par n^2 au numérateur et au dénominateur, on fait apparaître x , y et z :

$$\frac{x^2 n_x^2}{n^2(n_x^2 - n^2)} + \frac{y^2 n_y^2}{n^2(n_y^2 - n^2)} + \frac{z^2 n_z^2}{n^2(n_z^2 - n^2)} = 0$$

Après mise au même dénominateur on obtient l'équation de la surface des indices :

$$x^2 n_x^2 (n_y^2 - n^2)(n_z^2 - n^2) + y^2 n_y^2 (n_x^2 - n^2)(n_z^2 - n^2) + z^2 n_z^2 (n_x^2 - n^2)(n_y^2 - n^2) = 0.$$

6 Annexe 2 : Tracés de rayons lumineux et de vecteurs d'onde (★)

6.1 Construction de Descartes

La construction de Descartes traduit la conservation de la composante tangentielle du champ. Elle permet de déterminer la direction du vecteur d'onde. Pour faire la construction comme indiqué sur la partie gauche de la figure 7.4 :

- on trace deux cercles concentriques de rayons égaux aux indices optiques n_x et n_y ;
- on prolonge le rayon incident qui passe par le centre des cercles jusqu'à son intersection I_1 avec le cercle de rayon n_x ;
- à partir de I_1 , on abaisse la perpendiculaire I_1H au plan du dioptré, elle coupe le cercle de rayon n_y au point I_2 ;
- OI_2 est la direction du vecteur d'onde réfracté. Dans un milieu isotrope, la direction coïncide avec la direction du rayon réfracté.

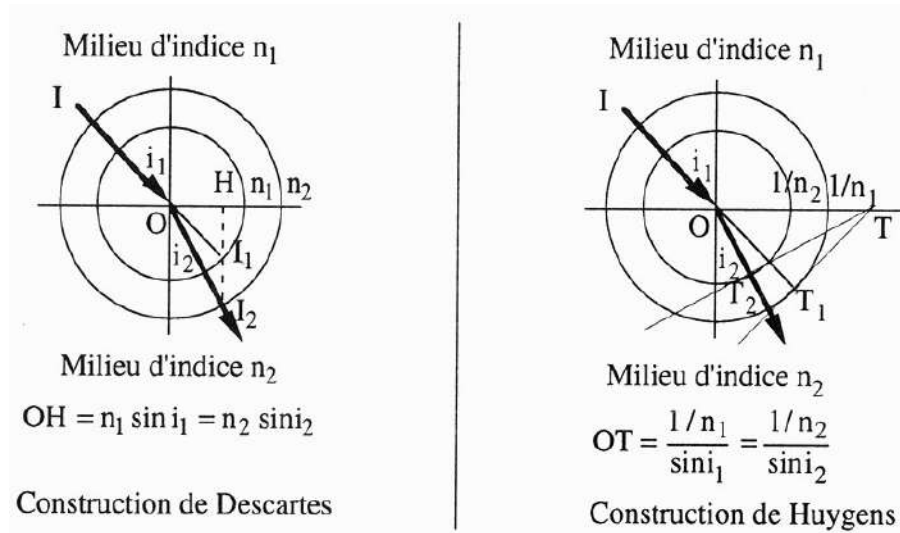


FIGURE 7.4 – Constructions de Descartes et de Huygens dans un milieu isotrope (figure extraite du Manuel d'optique de G. Chartier).

6.2 Construction de Huygens

La construction de Huygens s'appuie sur le principe de Huygens. Sur la figure 7.5, chaque point du dioptré émet une ondelette qui se propage à la vitesse c/n . On considère une onde plane incidente qui atteint le point A en $t = 0$ et qui émet une onde sphérique. L'onde plane atteint le point T à l'instant t . La surface d'onde dans le milieu 2 est une demi-sphère de rayon $v_2 t$ à l'instant t . La figure représente au même instant différentes ondes sphériques émises par les points de l'interface entre A et T . Les sphères sont tangentes à la droite TT' . Le rayon lumineux réfracté est dans la direction AT' .

Pour faire une construction de Huygens comme indiqué sur la partie droite de la figure 7.4 :

- On trace deux cercles concentriques de rayons respectifs $1/n_x$ et $1/n_y$
- On prolonge le rayon incident jusqu'à son intersection T_1 avec le cercle qui correspond à son milieu de propagation (cercle de rayon $1/n_x$).
- On trace la tangente en T_1 qui coupe le plan du dioptré en T . À partir de T on trace la tangente en T_2 au cercle qui correspond au milieu réfracté (cercle de rayon $1/n_y$) ;
- OT_2 est le rayon réfracté.

On peut appliquer ce principe de construction à la réfraction à l'interface de milieux anisotropes. Dans ce cas, les surfaces $1/n$ (encore appelées *surface des rayons*) ne sont pas des sphères mais des nappes. Il faudra de plus prendre en compte deux nappes d'indice n' et n'' comme représenté sur la figure 7.6.

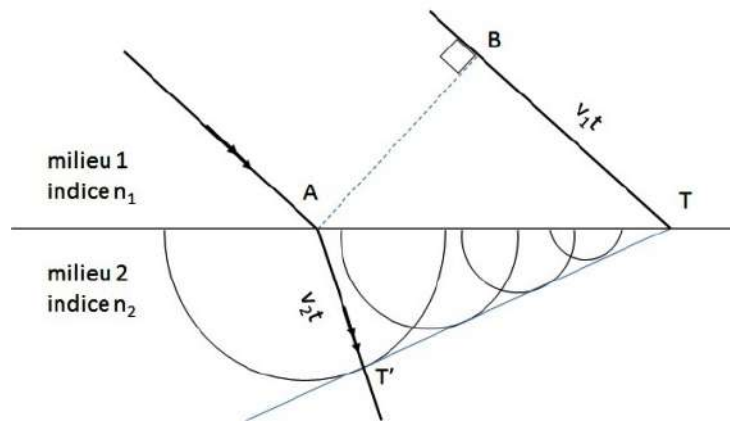


FIGURE 7.5 – Principe de la construction de Huygens dans un milieu isotrope.

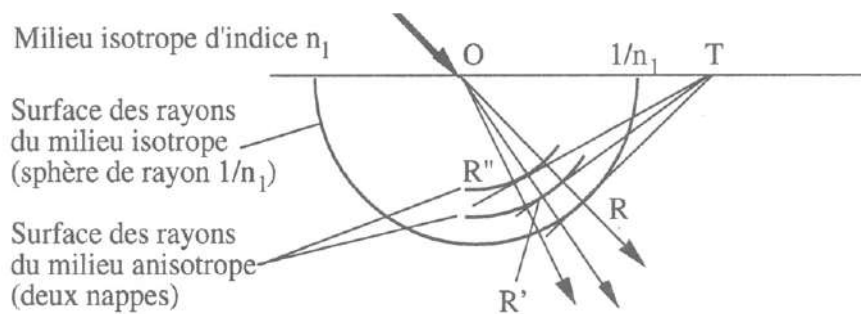


FIGURE 7.6 – Construction de Huygens dans un milieu anisotrope. (figure extraite du Manuel d'optique de G. Chartier. Le milieu inférieur est anisotrope et plus biréfringent que le milieu supérieur isotrope)

