

TD n° 1 : Énergie et émissions de carbone. Ressources non renouvelables.

Données

— Masses molaires :

Molécule/Atome	C	O	Al	CO ₂	« molécule d'air » (moyenne)
Masse molaire (g/mol)	12	16	27	44	29

— 1 ppm est défini par une partie par million d'atomes : 1ppm de CO₂ signifie que sur un million d'atomes, 1 est un atome de carbone.

— $P_{atm} = 10^5$ Pa et $R_{Terre} \simeq 6400$ km

Exercice I Ordres de grandeur sur les émissions de CO₂

I.1) Feux de forêts. Lors de l'été 2023, les incendies au Canada ont brûlé plus de 16 millions d'hectares de forêt (chiffre au 04/09/2023). Estimer la masse de CO₂ émise dans l'atmosphère et la comparer aux émissions territoriales annuelles du Canada (~ 550 Mt en 2021) et aux émissions annuelles mondiales. On considérera que le carbone représente la moitié de la masse totale du bois.

I.2) Émissions et concentration de CO₂.

I.2.a) Conversion. Sachant que la force de pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface terrestre est égale au poids de l'atmosphère, calculer la masse totale de l'atmosphère. En déduire la masse de CO₂ correspondant à 1 ppm de la masse de l'atmosphère.

I.2.b) Cumul historique. En 1870, la concentration de CO₂ atmosphérique était de 280 ppm. Un article¹ évalue les émissions dues aux activités humaines, cumulées sur la période 1870-2013, à (535 ± 55) Gt d'atomes de carbone. Sachant que seule la moitié des émissions de CO₂ reste dans l'atmosphère, l'autre moitié étant absorbée par les océans et les sols, en déduire la concentration atmosphérique de CO₂ en 2013.

I.2.c) Question complémentaire : énergies fossiles et émissions de CO₂. Estimer la consommation moyenne d'essence annuelle d'un automobiliste. En déduire le taux d'accroissement de CO₂ atmosphérique annuel lié à la consommation d'énergie fossile. Comparer avec le taux réellement mesuré de 2 ppm par an. On indique qu'un litre d'essence contient 0,75 kg d'atomes de carbone.

I.3) Travail humain / énergies fossiles

I.3.a) On cherche une estimation de la puissance mécanique qu'un humain peut fournir en une journée de (dur) travail. On considérera par exemple une ascension régulière correspondant à un dénivelé de 1700 m, effectuée en 10h par une personne de 74 kg et portant un bagage de 10 kg. Exprimer l'énergie mécanique fournie en MJ ainsi que la puissance correspondante.

1. Quéré et al., *Earth Syst. Sci. Data*, **6**, 235 (2014)

- I.3.b) Question complémentaire :** On peut, de manière alternative, estimer la puissance mécanique fournie par une personne ayant excavé de la terre pendant 10 h, en faisant un trou d'une surface de 16 m^2 sur une hauteur de 1 m. Exprimer l'énergie mécanique mise en jeu en MJ puis en kWh ainsi que la puissance correspondante (on donne $\rho_{\text{terre}} \sim 5,5 \text{ g/cm}^3$).
- I.3.c)** La combustion d'un litre d'essence génère environ 10 kWh de chaleur, qui est utilisée par un moteur automobile avec un rendement de l'ordre de 25%. Comparer l'énergie fournie par un litre d'essence à celle fournie par une journée de travail humain.
- I.3.d) Question complémentaire** Le cheval-vapeur (ch) est une unité de puissance introduite lors de l'apparition des machines à vapeur, afin d'exprimer leur puissance par rapport à celle fournie par un cheval. Il est défini comme la puissance à fournir pour élever une masse de 75 kg sur une hauteur de 1 mètre en 1 seconde. Calculer la valeur de 1 ch et exprimer les puissances ci-dessus en ch.

Exercice II Recyclage de l'aluminium

- II.1)** L'aluminium est un métal très polluant à produire à partir de la bauxite mais fait partie des métaux qui se recyclent le mieux. On considère une canette produite en 2023 qui serait continuellement recyclée par la suite. En supposant une efficacité de recyclage de $\sim 95 \%$, un taux de collecte de $\sim 75 \%$, et une durée de cycle de 40 jours (de la poubelle jaune au retour sur le marché), calculer la part initiale d'aluminium encore sur le circuit 1 an plus tard et 10 ans plus tard.
- II.2) Question complémentaire :** au bout de combien de temps une quantité initiale d'une mole (correspondant à la masse de 2 canettes) se réduit-elle à un seul atome encore présent ?
- II.3)** Supposons que chaque personne sur Terre consomme une canette d'aluminium de 13 g par jour. Quelle masse d'aluminium faudrait-il alors extraire chaque année pour compenser les pertes du circuit de recyclage ? Comparer cette valeur à la production mondiale d'aluminium (64 Mt en 2018) et aux réserves mondiales de bauxite (entre 28 et 75 Gt, selon la façon dont elles sont définies et estimées - il faut 4 à 5 t de bauxite pour produire 1 t d'aluminium).

Exercice III Pic de Hubbert

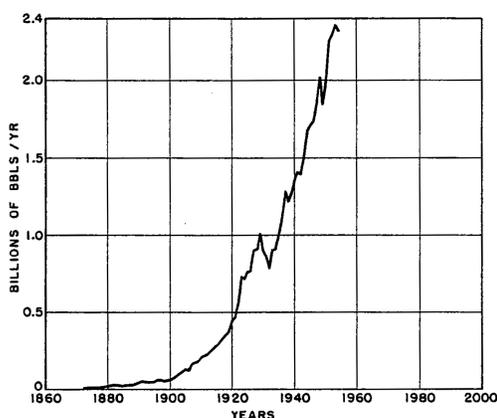


Figure 5 - United States production of crude oil.

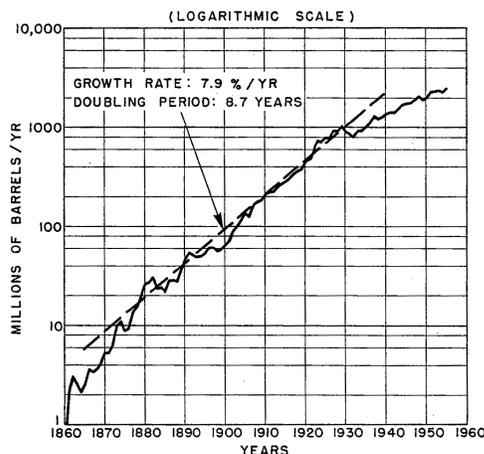


Figure 10 - Crude-oil production in the United States plotted on semilogarithmic scale.

FIGURE 1 - Production de pétrole annuelle P en échelles linéaire et logarithmique (source : Hubbert, 1956).

Dans les années 1950, le géophysicien M. K. Hubbert (Shell Company) a proposé un modèle mathématique appliqué à l'épuisement des ressources en énergies fossiles, et a ainsi prédit l'existence d'un pic de production de pétrole aux États-Unis situé vers 1970 et suivi d'un déclin. La quantité cumulée $Q(t)$ est le stock de pétrole extrait depuis le début des forages (exprimée en milliards de barils ou Gbl, 1 bl = 159 L). La production annuelle (unité : Gbl/yr) est la quantité de pétrole extraite en une année : $P(t) = dQ/dt$. On a donc $Q(t) = \int_0^t P(t') dt'$.

III.1) Expliciter les limites mathématiques que doit vérifier $P(t)$ et en déduire une proposition simple pour l'allure de la fonction $P(t)$. Quelle sera l'allure correspondante de $Q(t)$?

III.2) On observe sur la figure 1 que la courbe de production a initialement une allure exponentielle : $P(t) \propto e^{rt}$. Montrer que cela implique $P(t) \propto Q(t)$ (dans ce régime initial).

III.3) Il faut aussi rendre compte de ce que les gisements les plus accessibles ont été exploités en premier. De ce fait, l'extraction du pétrole devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que la quantité de pétrole disponible $Q_{total} - Q(t)$ s'épuise (on appelle Q_{total} la quantité totale de pétrole récupérée après épuisement du gisement). On peut le décrire simplement dans $P(t)$ par un facteur $\propto 1 - \frac{Q(t)}{Q_{total}}$ et finalement, Hubbert propose la forme suivante :

$$P(t) = \frac{dQ}{dt} = rQ \left(1 - \frac{Q}{Q_{total}} \right) \quad (1)$$

où r est un coefficient positif (unité : yr^{-1}).

En posant $y = Q/Q_{total}$, montrer que l'équation (1) s'écrit : $P = rQ_{total}y(1-y)$. Pour quelle valeur de y la production P atteint-elle son maximum ? En conclure que le pic de production t_{peak} est atteint lorsque la moitié des réserves a été exploitée. Donner l'expression de P_{peak} .

III.4) Montrer que

$$Q(t) = \frac{Q_{total}}{1 + e^{-r(t-t_{\text{peak}})}} \quad (2)$$

est solution de l'équation (1). Tracer l'allure de $Q(t)$ et $P(t)$.

III.5) Application à la production de pétrole aux États-Unis². Les expressions analytiques de $P(t)$ et $Q(t)$ font intervenir 3 paramètres, r , Q_{total} et t_{peak} , qui peuvent être obtenus par un ajustement numérique de données réelles. Sur la figure 2 sont représentés : (en traits pleins) les données de la production annuelle $P(t)$ et du stock cumulé $Q(t)$ de pétrole aux États-Unis jusqu'en 2022 et, (en pointillés) les ajustements des données disponibles jusqu'en 1956 par les expressions (1) et (2). Commenter.

III.6) On revient plus en détail sur la démarche de Hubbert en exploitant les données d'une autre manière.

III.6.a) Montrer que P/Q suit une loi linéaire avec Q .

III.6.b) Le graphe P/Q en fonction de Q est donné en figure 3. Commenter la pertinence du modèle et estimer r et Q_{total} .

III.6.c) En déduire une estimation de Q_{peak} et P_{peak} .

2. Données : EIA (*Energy Information Administration*)

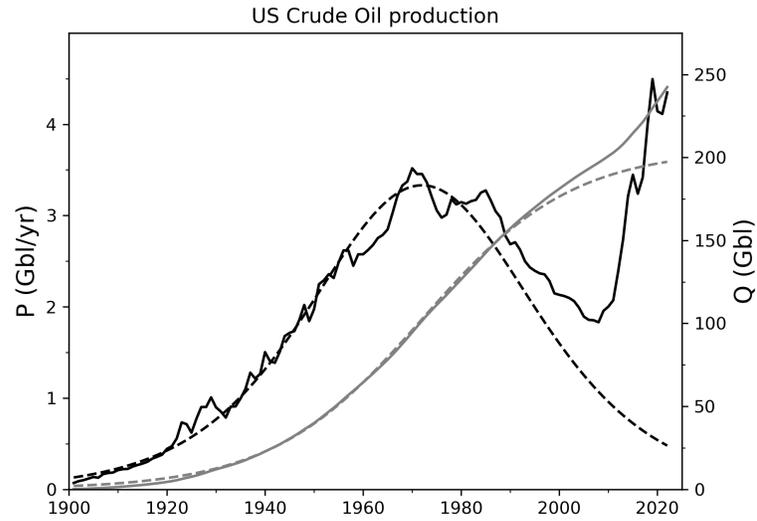


FIGURE 2 – En traits pleins : production annuelle (Gbl/yr, en noir) et cumulée Q (Gbl, en gris) aux États-Unis entre 1900-2022. En pointillés : modèle obtenu avec les paramètres $r = 0,065 \text{ yr}^{-1}$, $Q_{total} = 205 \text{ Gbl}$ et $t_{peak} = 1972$.

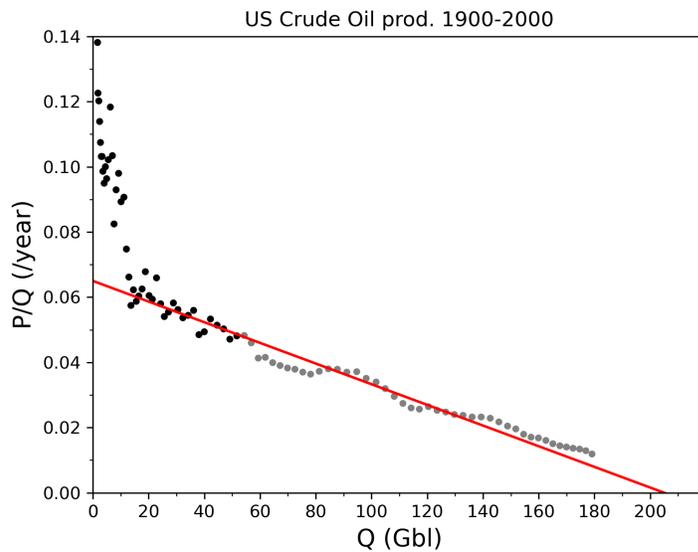


FIGURE 3 – Tracé de P/Q en fonction de Q pour les États-Unis. En noir : données de 1900 à 1956 utilisées par Hubbert. L'ajustement linéaire est réalisé sur la période 1930-1990.