

TD 7 : Modulateur acousto-optique

Le principe de Huygens-Fresnel permet de comprendre pourquoi limiter spatialement un faisceau lumineux peut en changer drastiquement ses propriétés. Cependant, sa généralité ouvre beaucoup de possibilités, et est à l'origine du domaine de l'*optique de Fourier*.

À la place de mettre une simple ouverture sur le trajet de la lumière, on peut mettre un objet dont la transparence et l'indice vont varier spatialement. On peut ainsi moduler le front d'onde aussi bien en amplitude qu'en phase. De nombreuses technologies peuvent servir de modulateur spatial de lumière (SLM) : cristaux liquides, magnétisme, miroirs déformables, puits quantiques, etc. On étudie ici un modulateur acousto-optique (AOM). Ce dispositif est largement utilisé, par exemple pour le contrôle précis de la fréquence des lasers ou dans les lasers à commutation-Q (Q-switch).

1 Diffraction par un réseau de phase

En introduction, on s'intéresse à la diffraction d'une onde plane par un réseau de phase, les ondes incidentes et sortantes étant considérées à l'infini. On considère donc une fonction de transparence :

$$t(X, Y) = e^{iA \sin(2\pi f_0 X)} \quad \text{tant que} \quad \begin{cases} |X| \leq L_x/2 \\ |Y| \leq L_y/2. \end{cases} \quad (1)$$

- Rappeler la formule des réseaux, qui donne la position des maxima d'intensité lumineuse. S'applique-t-elle pour les réseaux de phase ?

Correction

Si θ_i et θ_n sont les angles fait par rapport à la normale au réseau des ondes incidente et diffractée respectivement, alors :

$$\sin \theta_n - \sin \theta_i = n \frac{\lambda}{a}$$

avec a le pas du réseau. n est l'*ordre* de diffraction.

La formule des réseaux traduit des interférences exactement constructives entre deux ondes diffractées voisines. Si elle n'est pas vérifiée, on a donc un (même léger) déphasage, qui va s'accroître entre la n^{e} et la $n + p^{\text{e}}$ onde, jusqu'à devenir destructive. On comprend donc que plus le réseau est grand, plus les points d'intensité non-nulle seront exactement sur les positions données par la formule des réseaux.

Elle est complètement indépendante de la structure interne du réseau (sinusoïdal, noir ou blanc, qu'il soit en amplitude ou en phase, etc.), n'apparaît que la périodicité spatiale.

Mais attention, cette formule donne la position des potentiels maxima, elle ne donne pas leur intensité lumineuse relative les uns par rapport aux autres.

- Justifier (sans calcul) que l'on peut écrire

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin u} e^{-inu} du. \quad (2)$$

La fonction J_n ainsi définie est la fonction de Bessel d'ordre n . En déduire le développement de la fonction $t(X, Y)$.

Correction

La fonction $f_x(\theta) = e^{ix \sin \theta}$ est périodique de période 2π . Elle possède donc une série de Fourier. Comme elle est continûment dérivable, le « développement en série de Fourier » est valide sur la base des $\{e^{in\theta}\}_n$, et les coefficients de Fourier sont par définition les $J_n(x)$.

Pour le développement de $t(X, Y)$, on a donc

$$t(X, Y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) e^{2i\pi n f_0 X} \quad \text{tant que} \quad \begin{cases} |X| \leq L_x/2 \\ |Y| \leq L_y/2. \end{cases}$$

3. Calculer l'expression de l'amplitude diffractée par le réseau de phase. On rappelle l'amplitude diffractée d'une onde dans l'approximation de Fraunhofer :

$$U(M) = \frac{U_S}{\lambda z} \iint_{\Sigma} t(X, Y) e^{-2i\pi(f_X X + f_Y Y)} dX dY \quad (3)$$

avec $f_X = \frac{x}{\lambda z}$ et $f_Y = \frac{y}{\lambda z}$ les fréquences spatiales, x et y étant les coordonnées sur l'écran d'observation (supposé très loin pour vérifier les conditions de Fraunhofer). Par la suite, on se placera à $f_Y = 0$.

Correction

En remplaçant l'expression de la fonction de transparence $t(X, Y)$ par son développement en série de Fourier, on obtient :

$$U(M) = \frac{U_S}{\lambda z} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} e^{-2i\pi f_Y Y} dY \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{-2i\pi f_X X} e^{2i\pi n f_0 X} dX.$$

L'intégrale selon Y est celle de la diffraction d'une fente de largeur L_y . Celle selon X est aussi un sinc caractéristique, mais spatialement translatée de $n f_0 L_x$.

$$U(M) = U_S \frac{L_x L_y}{\lambda z} \operatorname{sinc}(\pi L_y f_Y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) \operatorname{sinc}(\pi L_x (f_X - n f_0)).$$

4. En faisant l'approximation $f_0 \gg \frac{1}{L_x}$, exprimer l'intensité diffractée. Qu'est-ce que signifie cette approximation sur la figure de diffraction ?

Correction

On se place en $f_Y = 0$, et si on appelle I_0 le préfacteur, on a

$$I(M) = I_0 \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) \operatorname{sinc}(\pi L_x (f_X - n f_0)) \right]^2.$$

L'amplitude est la somme d'amplitudes de fentes translatées spatialement. Si le décalage spatial $\pi L_x f_0$ est suffisamment grand, il n'y a pas de recouvrement entre les différentes amplitudes (le sinc^2 décroît assez vite). Alors, le carré de la somme des amplitudes est simplement la somme des carrés (l'approximation revient à dire que les termes croisés sont nuls) :

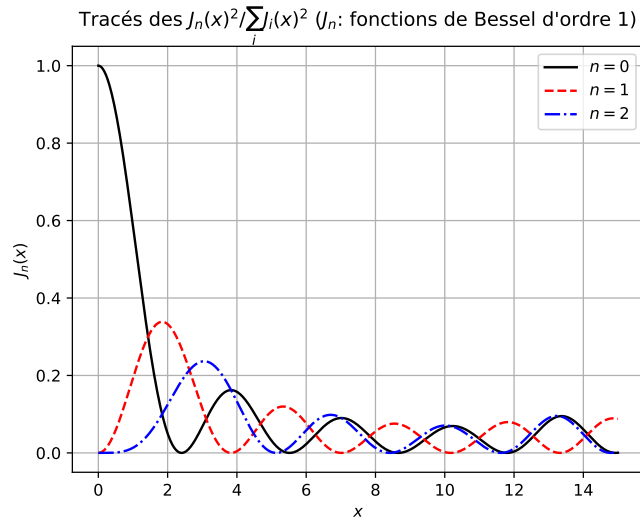
$$I(M) = I_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A)^2 \operatorname{sinc}^2(\pi L_x (f_X - n f_0)).$$

Il s'agit donc d'une somme incohérente des intensités de fentes **spatialement translatées**, et avec des poids relatifs donnés par les fonctions de Bessel $J_n(A)^2$.

5. Pour avoir un maximum d'intensité lumineuse dans les ordres 1 de diffraction, quelle doit-être la valeur du paramètre A ? On pourra utiliser Python pour l'application numérique. Quelle est alors la valeur du rapport de l'intensité dans l'ordre 1 sur l'intensité totale ?

Correction

On cherche donc le maximum de $J_1(A)$. Sur la figure ci-dessous sont représentées les trois premières fonctions de Bessel.



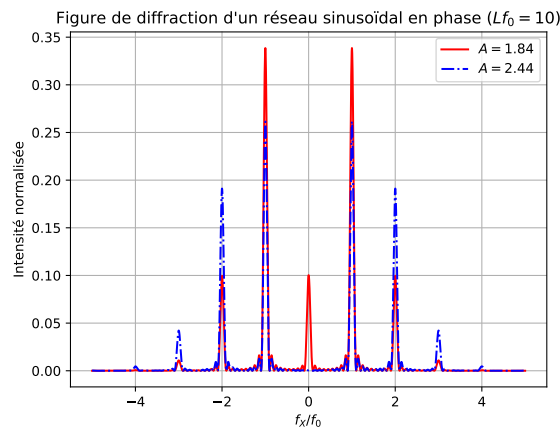
Selon l'objectif recherché, on choisira donc une amplitude A différente :

- Si on veut maximiser l'amplitude dans l'ordre 1 : $A \approx 1,84$;
- Si on cherche plutôt à annuler l'ordre 0 : $A \approx 2,44$;
- Si on cherche à annuler l'ordre 1 : $A \approx 3,9$, etc.

6. Dans le cas d'un réseau sinusoïdal en amplitude, la figure de diffraction est très similaire à celle du réseau de traits du TD précédent. La puissance maximale défléchie dans l'ordre 1 est de 6,25 %. Quels intérêts présentent le réseau en phase par rapport au réseau en amplitude ?

Correction

Sur la figure ci-dessous, on représente l'intensité lumineuse diffractée en restant dans le cadre de l'approximation $L_x f_0 \gg 1$ (mais le graphe présenté est obtenu avec le calcul exact), on voit bien la séparation des différentes figures correspondant aux différents ordres.



En calculant le rapport $\frac{J_1(A)^2}{\sum J_n(A)^2}$ pour $A = 1,84$, on trouve que 61 % de l'énergie est récupérée dans l'ordre 1. Intérêts du réseau de phase :

- il est possible de déplacer l'énergie lumineuse de l'ordre 0 vers les ordres plus élevés. Alors qu'on ne récupère que 6,25% de l'énergie de l'ordre 0 dans l'ordre 1 pour un réseau d'amplitude, pour le choix optimal de A , on peut obtenir 34% avec un réseau de phase.
- si on souhaite un fort facteur dispersif, il est possible d'utiliser les ordres > 1 avec des efficacités supérieures à 10%.
- Contrairement à un réseau d'amplitude qui cache une partie de l'onde, un réseau de phase est complètement transparent, et laisse donc passer toute l'intensité lumineuse.
- Si un réseau de traits est très facile à produire, un réseau de phase est nettement plus compliqué : on utilise plus volontiers des réseaux en amplitude blazés.

2 Diffraction Acousto-Optique

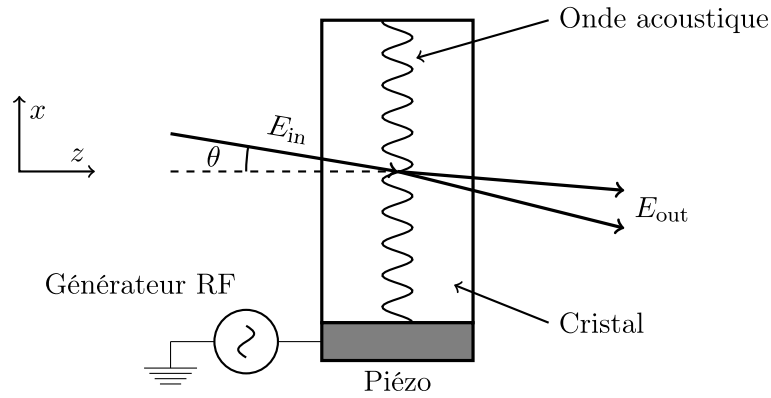


FIGURE 1 – Schéma d'un modulateur acousto-optique.

Un modulateur acousto-optique est constitué d'un milieu parfaitement transparent (un liquide ou un cristal) dans lequel se propage une onde acoustique à une fréquence radio f_{RF} créée par un transducteur piézoélectrique. On note x la direction de propagation de l'onde acoustique. Par effet photoélastique, le cristal peut voir son indice optique varier, et sera de la forme :

$$n(x) = n_0 + \delta n \sin(2\pi x/\Lambda - 2\pi f_{RF}t) \quad \text{avec } \delta n \ll n_0. \quad (4)$$

On éclaire le milieu à l'aide d'un faisceau lumineux que l'on assimile à une onde plane se propageant avec un angle θ par rapport à l'axe z de la figure 1.

Dans ce problème d'interaction entre une onde acoustique et une onde lumineuse, trois longueurs caractéristiques interviennent. On définit le paramètre adimensionné suivant :

$$\Pi = \frac{\lambda d}{\Lambda^2} \quad (5)$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière dans le milieu, Λ la longueur d'onde de l'onde acoustique, et d la largeur du milieu.

7. Calculer le paramètre Π dans les deux situations suivantes :

- Pour un liquide dans une cuve d'épaisseur 1 cm avec une fréquence RF de l'ordre du MHz.
- Pour un cristal d'épaisseur 1 cm avec une fréquence RF de l'ordre du GHz.

Correction

Dans un liquide, la vitesse de propagation d'une onde acoustique est de l'ordre de $V \sim 1500 \text{ m s}^{-1}$. Avec $f_{RF} = 1 \text{ MHz}$, on obtient une longueur d'onde $\Lambda = 1,5 \text{ mm}$. Ainsi :

$$\Pi = \frac{\lambda d}{\Lambda^2} = \frac{1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^{-3} \ll 1. \quad (6)$$

Dans le cas d'un solide, la vitesse de propagation est plus grande, typiquement $V \sim 5000 \text{ m s}^{-1}$. Avec maintenant $f_{RF} = 1 \text{ GHz}$, on a $\Lambda = 5 \mu\text{m}$, ainsi

$$\Pi = \frac{\lambda d}{\Lambda^2} = \frac{1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-2}}{25 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^2 \gg 1. \quad (7)$$

2.1 Régime de Raman-Nath : $\Pi \ll 1$

Dans ce régime, l'onde acoustique est très confinée latéralement (et possède alors une distribution d'impulsions très large), on suppose le milieu infiniment mince, ce problème se ramène alors au cas d'un réseau de phase mince traité dans la partie 1. On supposera que l'onde incidente arrive en incidence normale sur le milieu.

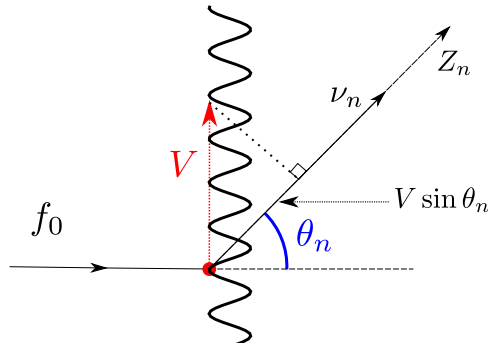
8. Direction. Exprimer $\sin \theta_n$ où n est le n^{e} ordre de diffraction du réseau.

Correction

La formule des réseaux s'applique dans ce cas, avec Λ la période spatiale du réseau. On a donc :

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

9. *Fréquence.* On peut interpréter ce problème comme l'absorption puis la ré-émission d'une onde lumineuse par une onde acoustique qui se propage. Dédurre de la formule du décalage Doppler l'expression de la fréquence de l'onde lumineuse diffractée d'ordre n .

Correction

L'onde lumineuse arrive perpendiculairement à la propagation de l'onde acoustique, cette première « voit » donc la fréquence f_{RF} sans décalage Doppler (en mécanique classique).

En revanche, si l'onde repart avec un angle θ_n par rapport à la normale au milieu, l'observateur placé sur l'axe de propagation Z_n (cf. figure ci-dessous) verra un décalage Doppler dû au mouvement de l'onde acoustique « émettrice ». La vitesse projetée sur l'axe Z_n vaut $V \sin \theta_n$, la nouvelle fréquence vaut donc

$$\nu_n = \nu_0 \left(1 + \frac{V \sin \theta_n}{c} \right) = \nu_0 + \nu_0 \frac{V \sin \theta_n}{c} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\nu_n = \nu_0 + n f_{\text{RF}}}$$

10. *Amplitude.* Calculer l'intensité lumineuse diffractée dans ce régime.

Correction

L'onde acoustique joue le rôle d'un réseau de phase, avec une fonction de transparence $t(X) = e^{i\varphi(x)}$ où $\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} n(x)d$, d étant la largeur de la cuve. Ainsi,

$$t(X) = e^{i\varphi(x)} \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} n(x)d = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} dn_0}_{=\varphi_0} + \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} d \delta n \sin \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x - 2\pi f_{\text{RF}} t \right)}_{=A}.$$

On peut la développer comme précédemment :

$$t(X) = e^{i\varphi_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) e^{-2i\pi n f_{\text{RF}} t} e^{2i\pi n \frac{X}{\Lambda}}.$$

L'amplitude s'écrit (en éliminant les phases globales et les préfacteurs)

$$U(M) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A) e^{-2i\pi n f_{\text{RF}} t} \text{sinc} \left(\pi L_x \left(f_X - \frac{n}{\Lambda} \right) \right).$$

Et toujours dans l'approximation d'un réseau très dispersif ($\Lambda \ll L_x$), l'intensité s'écrit alors

$$\boxed{I(M) = I_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(A)^2 \text{sinc}^2 \left(\pi L_x \left(f_X - \frac{n}{\Lambda} \right) \right)}.$$

2.2 Régime de Bragg : $\Pi \gg 1$

Dans ce régime qui concerne les cristaux, le milieu est épais, et l'onde acoustique peut cette fois être considérée comme une onde plane de vecteur d'onde \vec{K} bien défini.

11. *Direction et fréquence.* Montrer que dans cette situation, l'onde arrivant avec $\theta = 0$ ne peut pas interagir avec le cristal. Pour quels angles θ_n est-il possible d'avoir interaction avec le milieu ?

Correction

Cette fois, l'onde a un vecteur d'onde bien déterminé \vec{K} . Il faut donc satisfaire la conservation de la quantité de mouvement lors du processus d'interaction. On peut à la rigueur échanger plusieurs fois cette valeur \vec{K} .

De plus, la loi de conservation de l'énergie nous donne comme dans le régime de Raman-Nath $\nu_n = \nu_0 + n f_{RF}$. La fréquence RF étant de plusieurs ordres de grandeur inférieure à ν_0 , on a $\nu_n \approx \nu_0$ avec une très bonne approximation. Ce qui impose une longueur d'onde quasi-identique, et donc une égalité des normes $|k_i| = |k_n|$. Respecter les deux conditions $\vec{k}_n = \vec{k}_i + n\vec{K}$ et $||\vec{k}_i|| = ||\vec{k}_n||$ impose nécessairement que \vec{k}_i et \vec{k}_n sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Vu le schéma, les angles d'incidences possibles sont donc les θ_n tels que

$$\sin \theta_n = \frac{n \|\vec{K}\|}{2 \|\vec{k}_i\|}.$$

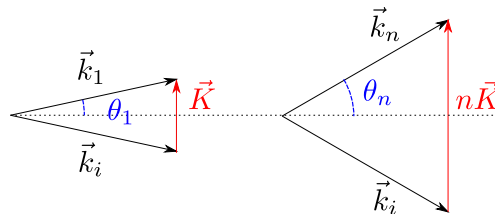


Fig. Conservation des vecteurs d'onde

12. Retrouver ce raisonnement à l'aide de considérations d'interférences constructives.

Correction

L'onde acoustique étant plane, on peut schématiser ses fronts d'onde. L'onde lumineuse va arriver sur l'onde acoustique, et être en partie réfléchi sur chaque front d'onde. Pour que l'onde soit globalement diffractée, il faut que les interférences soient constructives.

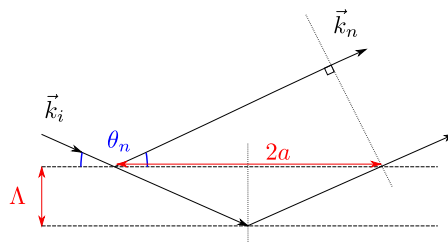


Fig. Approche historique de Bragg

La différence de marche entre les deux rayons sortants s'écrit (avec un peu de trigonométrie) :

$$\delta = 2 \frac{\Lambda}{\sin \theta} - 2 \frac{\Lambda}{\sin \theta} \cos^2 \theta = 2\Lambda \sin \theta. \quad (8)$$

La condition d'interférences constructives $\delta = n\lambda$ permet de retrouver le résultat de la question précédente (en termes de longueurs d'onde) :

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{2\Lambda}.$$

Dans le régime de Bragg, on peut montrer que l'ordre $n = 1$ est largement dominant. L'angle $\theta_1 = \theta_B$ est appelé *l'angle de Bragg*. On souhaite déterminer la répartition d'intensité lumineuse entre les ondes incidente et diffractée dans cet ordre après le cristal.

13. *Amplitude.* Soit E_0^+ (resp. E_1^+), ω_0 (resp. ω_1), k_0 (resp. k_1) les amplitude, pulsation et vecteur d'onde du champ de l'onde non déviée (resp. diffractée). On peut écrire le champ résultant sortant sous la forme :

$$E^+(z, t) = E_0^+(z) e^{-i\omega_0 t} + E_1^+(z) e^{-i\omega_1 t}. \quad (9)$$

On cherche à déterminer les poids $c_{0,1}(z)$ dans la décomposition de Fourier du champ E^+ .

(a) Montrer que les coefficients vérifient le système couplé

$$\begin{cases} \partial_z c_0 = i\alpha c_0 - \frac{\beta}{2} c_1 \\ \partial_z c_1 = i\alpha c_1 + \frac{\beta}{2} c_0 \end{cases} \quad (10)$$

où α et β sont deux coefficients à déterminer.

Correction

Le coefficient de Fourier à la pulsation ω vaut $\frac{1}{2\pi} \int E^+ e^{i\omega t} dt$.

On peut calculer la dérivée spatiale de $c_0(z)$ par exemple :

$$\frac{\partial c_0}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial E^+}{\partial z} e^{i\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial E_0^+}{\partial z} e^{-i\omega_0 t} + \frac{\partial E_1^+}{\partial z} e^{-i\omega_1 t} \right) e^{i\omega_0 t} dt.$$

Or les deux dérivées peuvent s'écrire $\frac{\partial E_0^+}{\partial z} = i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} z \right) E_0^+$, et la dérivée de la phase s'écrit d'après la sous-partie précédente

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} z = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \delta n \frac{e^{iqx - i\omega_{RF}t} - e^{-iqx + i\omega_{RF}t}}{2i} = \alpha + \beta \frac{e^{iqx - i\omega_{RF}t} - e^{-iqx + i\omega_{RF}t}}{2i}.$$

Dans la suite, on se place à $x = 0$ pour simplifier les expressions (sans grande perte de généralité. En passant, on néglige ici la variation de x lorsque l'onde lumineuse se propage de façon oblique dans le milieu)

En remplaçant $\frac{\partial}{\partial \varphi} z$ dans l'équation de $\frac{\partial}{\partial c_0} z$, on voit apparaître plusieurs termes oscillants à des pulsations différentes :

$$\frac{\partial E^+}{\partial z} = i\alpha E_0^+ e^{-i\omega_0 t} + \frac{\beta}{2} E_0^+ (e^{-i\omega_1 t} - e^{-i(\omega_0 - \omega_{RF})t}) + i\alpha E_1^+ (e^{-i\omega_1 t} + \frac{\beta}{2} E_1^+ e^{-i(\omega_0 + 2\omega_{RF})t} - e^{-i\omega_0 t}).$$

En sélectionnant les termes oscillants à ω_0 et ω_1 , on obtient deux équations sur les coefficients de Fourier c_0 et c_1 :

$$\begin{cases} \partial_z c_0 = i\alpha c_0 - \frac{\beta}{2} c_1 \\ \partial_z c_1 = i\alpha c_1 + \frac{\beta}{2} c_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta n. \quad (11)$$

(b) Résoudre ce système, et en déduire l'efficacité de diffraction I_1/I_{in} .

Correction

On peut par exemple poser $c = c_0 + ic_1$ et combiner les deux équations précédentes en une équation sur c :

$$\frac{\partial c}{\partial z} = i \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) c,$$

d'où on déduit que $c_1(z) \propto \sin \left[\left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) z \right]$. Ainsi, la partie de l'onde diffractée peut s'écrire :

$$\frac{I_1}{I_{in}} = \sin^2 \left[\left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) z \right].$$

On réécrit habituellement cette expression en fonction des caractéristiques du piézoélectrique et la puissance acoustique délivrée. Plus de détails [1].

Applications de l'effet acousto-optique

Le phénomène d'interaction entre lumière et onde acoustique est très utilisé pour différentes raisons :

- **Défecteur** : utilisé dans le régime de Bragg, il est possible de défléchir la quasi-intégralité du faisceau lumineux incident d'un angle qui dépend continûment de la fréquence RF. On peut donc guider un faisceau lumineux à haute fréquence. Ce principe est utilisé dans certains microscopes optiques et scanners optiques.

- De plus, la déflexion d'un faisceau laser est utilisée dans la technique du *Q-switching*. Cela consiste à sciemment abaisser le facteur de qualité d'une cavité laser, pour éliminer l'émission stimulée. On peut ainsi faire du pompage optique pour remplir le niveau excité (la seule limite étant l'émission spontanée), remettre un facteur de qualité grand, et obtenir ainsi brièvement une impulsion laser très intense. Pour baisser le facteur de qualité, il suffit par exemple de dévier le faisceau hors de la cavité grâce à l'effet acousto-optique ! cf. Fig. 2.
- **Modulateur** : l'interaction permet de changer très finement la fréquence optique, et de façon continue sur un (très) petit intervalle.
- **Filtre** : La diffraction de Bragg n'a lieu que pour un angle donné, donc une fréquence particulière. On peut ainsi utiliser ce phénomène pour filtrer une fréquence précise d'un faisceau spectralement large.

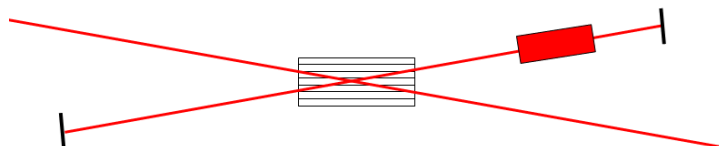
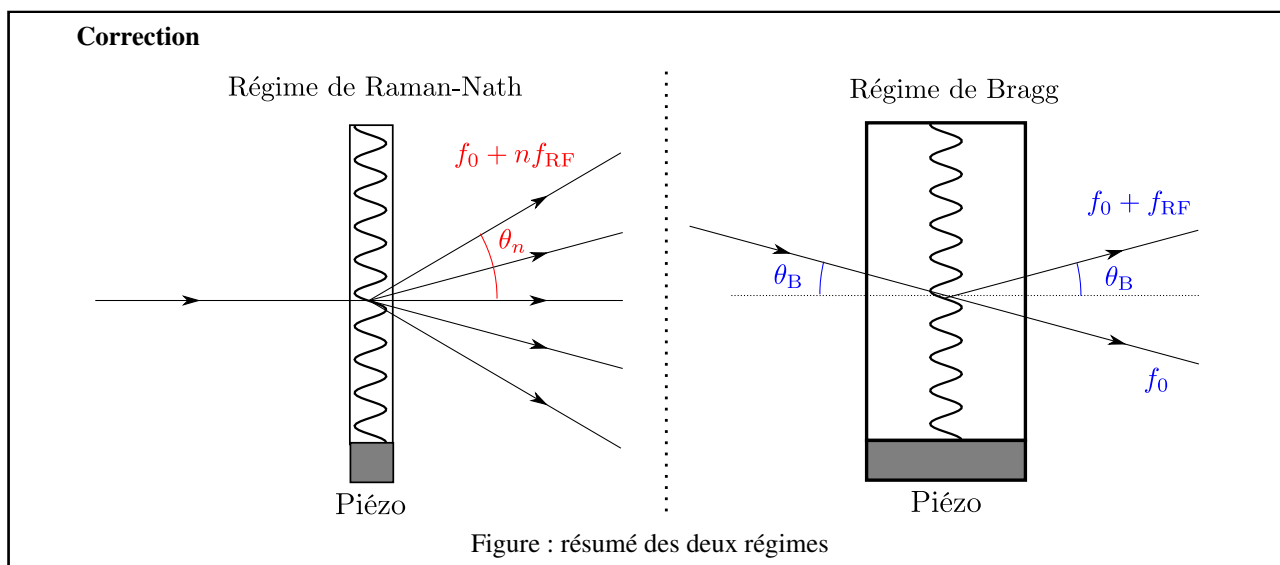


FIGURE 2 – Schéma de principe du *Q-switching* : lorsqu'on veut un grand facteur de qualité, on n'applique pas de tension RF. Le faisceau laser se réfléchit sur le miroir de gauche et reste dans la cavité. Si on branche la tension RF, le faisceau sera dévié par diffraction de Bragg hors de la cavité, et diminuera le facteur de qualité.



Références

- [1] [Manuscrit de thèse A. Socie](#), *Interaction acousto-optique dans les matériaux périodiquement structurés* (2014)