

TD 6 : Le formalisme des matrices $ABCD$

La propagation de la lumière paraxiale suivant des lois linéaires, il est souvent pratique d'utiliser une description matricielle, qui permet de calculer de façon systématique la propagation à travers un ensemble complexe d'éléments optiques.

1 Matrices $ABCD$ en optique géométrique paraxiale

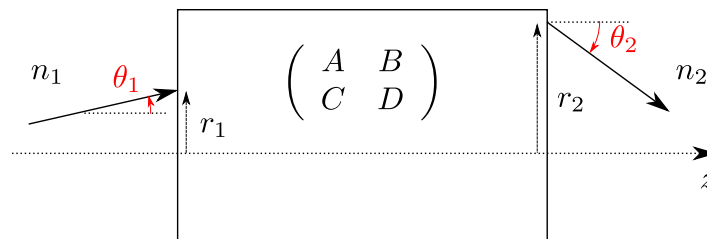


FIGURE 1 – Position du problème pour définir la matrice $ABCD$

On s'intéresse à la propagation d'un rayon lumineux dans un système centré (un milieu invariant par rotation) selon l'axe z de propagation. Soit r_1 (resp. r_2) la distance à l'axe z avant (resp. après) avoir franchi le système optique (cf. Fig. 1). On définit de plus la dérivée réduite $r' = n \frac{dr}{dz}$ faisant intervenir l'indice optique du milieu considéré. Ces quantités sont reliées par une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} \quad (1)$$

Cette matrice est une matrice de transfert caractéristique du système optique traversé, est souvent appelée (avec une originalité notable) matrice $ABCD$ (aussi *ray matrix* en anglais).

- Donner la relation simple entre les angles indiqués sur la Fig. 1 et les dérivées réduites dans le cadre de l'optique paraxiale.

Correction

Par définition de l'angle θ , on a $\tan \theta = \frac{dr}{dz}$. Dans l'approximation des petits angles : $r' = n\theta$.

- Déterminer les matrices $ABCD$ de ces différents cas, dans l'approximation de Gauss.

- sur une distance L dans un milieu homogène d'indice n ;

Correction

La lumière va en ligne droite, donc $\theta_2 = \theta_1$, et $r_2 = r_1 + \theta_1 L$. Ainsi la matrice s'écrit :

Matrice $ABCD$ dans l'espace libre :

$$\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

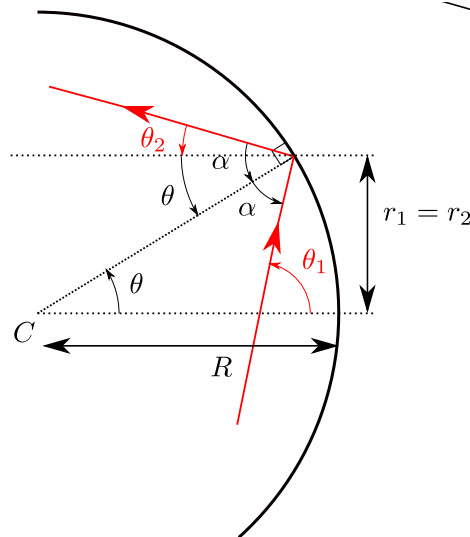
- à travers un dioptre plan entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 ;

Correction

Contrairement au cas de la propagation dans l'espace, ici l'objet est infiniment fin. Donc nécessairement $r_1 = r_2$. Quant aux angles, ils suivent la relation de Descartes de la réfraction : $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Dans l'approximation des petits angles, on a alors directement $r'_1 = r'_2$ (ce qui explique le choix des dérivées réduites). Ainsi

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'une interface diélectrique plane : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) d'un miroir sphérique ;

Correction

Comme pour l'interface plane, $r_1 = r_2$ puisque le miroir est fin. On cherche une relation entre θ_1 et θ_2 . Avec le schéma précédent, on a deux relations :

$$\theta + \alpha + (\pi - \theta_1) = \pi \quad \text{et} \quad \alpha = \theta + \theta_2$$

où l'angle θ est donné par $\tan \theta = \frac{r_1}{R}$.

En remplaçant l'expression de α , on trouve $\theta_2 = \theta_1 - 2\theta = \theta_1 - 2\frac{r_1}{R}$. Ainsi

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'un miroir sphérique : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Attention, on a pris ici une convention différente pour la définition de θ_1 et θ_2 . Dans la convention de θ_1 , l'angle de sortie serait plutôt $\pi - \theta_2$ si on regarde le schéma. Ceci correspond à « déplier les rayons », en faisant comme si le système transmettait la lumière au lieu de la réfléchir. Ce choix permet plus facilement de concaténer les matrices $ABCD$ sans se tromper sur les signes, puisque avec ce choix la lumière se propage toujours selon les z croissants.

(d) d'une lentille mince convergente de distance focale f' .

Correction

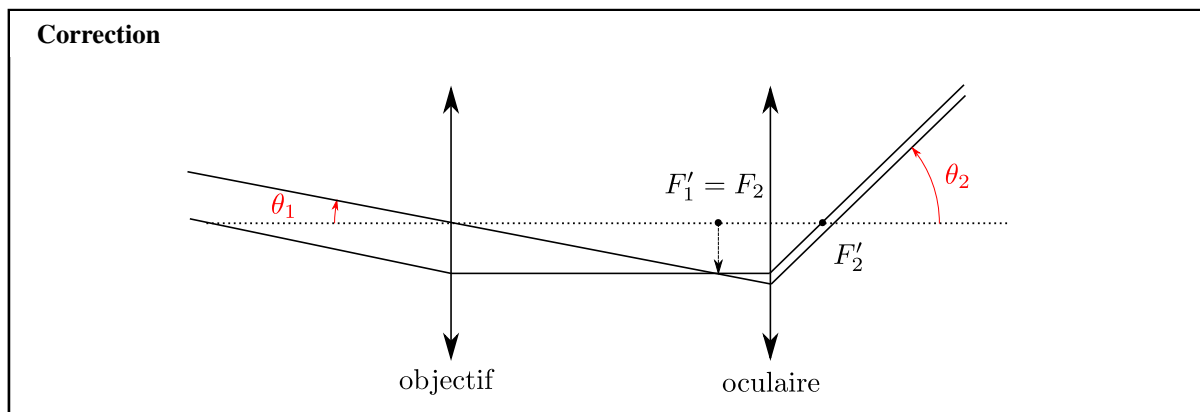
On a encore $r_1 = r_2$ pour une lentille mince (pour une lentille épaisse, il faudrait concaténer trois matrices $ABCD$: interface sphérique, propagation dans le verre et interface sphérique).

Les coefficients de la matrice ne dépendent pas de r_1 et r'_1 , on peut donc se placer dans deux cas particuliers pour les déterminer : si le rayon arrive parallèlement à l'axe optique ($\theta_1 = 0$), il passe par F' ($\theta_2 = -r_1/f'$). Si le rayon passe par le centre optique ($r_1 = 0$) il n'est pas dévié ($\theta_2 = \theta_1$). Ainsi

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'une lentille de distance focale } f' : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n}{f'} & 1 \end{pmatrix}$$

3. Grâce à ces blocs élémentaires, on peut construire les matrices de systèmes complexes. Considérons par exemple une lunette astronomique.

(a) Faire le schéma suivi par un rayon lumineux ;



(b) Calculer la matrice $ABCD$ de la lunette ;

Correction

La lunette est composée d'une lentille (objectif), puis d'une propagation de la lumière sur une distance L , puis une lentille convergente (oculaire), le tout avec un indice $n = 1$. La matrice $ABCD$ complète s'écrit comme le produit des matrices des trois éléments (attention à l'ordre des matrices) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{oc}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{obj}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_{obj}} & L \\ -\frac{1}{f_{obj}} + \frac{L}{f_{obj}f_{oc}} & 1 - \frac{L}{f_{oc}} \end{pmatrix}$$

et dans le cas d'un système afocal comme celui-ci, on a $L = f_{oc} + f_{obj}$, ce qui simplifie la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{f_{oc}}{f_{obj}} & f_{oc} + f_{obj} \\ 0 & -\frac{f_{obj}}{f_{oc}} \end{pmatrix}$$

(c) En déduire son grandissement (rapport de longueurs) et son grossissement (rapport angulaire). Que remarque-t-on ?

Correction

Un système afocal a pour intérêt de renvoyer à l'infini tous les rayons venant de l'infini. La notion associée à un tel système est donc le *grossissement*, qui compare deux angles. Notez que si objet et image sont à distance finie, on s'intéresse au rapport des longueurs (le grandissement), et si l'objet est à distance finie, mais l'image à l'infini comme dans le cas d'un microscope, on regarde le rapport d'un angle par une distance (la puissance optique).

$$G = \frac{r'_2}{r'_1} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

Dans le cas d'une lunette astronomique, on a typiquement $f_{obj} \sim 1 \text{ m}$ et $f_{oc} = 5 \text{ cm}$, soit un grossissement de -20 . Le signe moins indique que l'image est retournée. Et l'image est **grossie** 20 fois.

On peut aussi regarder le rapport des distances r_2/r_1 dans le cas $\theta_1 = 0$. On trouve que le grandissement $-\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$ est l'inverse du grossissement. C'est une propriété qui se généralise. Donc l'image est toujours retournée, et **rétrécie**.

Cette dernière propriété peut être utilisée avec un faisceau laser incident arrivant parallèlement à l'axe optique que l'on cherche à condenser. On a effectivement

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_{oc}}{f_{obj}} & f_{oc} + f_{obj} \\ 0 & -\frac{f_{obj}}{f_{oc}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_{oc}}{f_{obj}} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les élargisseurs lasers sont basés sur ce principe (l'usage contemporain des lunettes astronomiques).

4. On s'intéresse maintenant à des milieux non-homogènes. Par exemple une fibre à gradient d'indice (*GRIN fiber*), pour

laquelle l'indice suit une relation quadratique $n(r) = n_0 + \frac{1}{2}n_2r^2$. On rappelle l'équation des rayons

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\text{grad}} n$$

où s est une abscisse curviligne.

(a) Dans l'approximation paraxiale, déterminer l'équation vérifiée par $r(z)$.

Correction

Dans l'approximation paraxiale, on a $ds = \sqrt{dz^2 + dr^2} \approx dz$, que l'on remplace dans l'équation. En écrivant l'équation aux rayons en coordonnées cylindriques, l'équation sur r donne :

$$n\partial_{zz}r = \partial_r n = n_2r \quad \implies \quad r'' - \frac{n_2}{n(r)}r = 0 \quad (2)$$

Encore une fois, dans le cadre de l'approximation paraxiale on approximera $n(r) \approx n_0$ dans l'équation précédente. Finalement, en définissant un paramètre γ

$$\partial_{zz}r + \gamma^2 r = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = -\frac{n_2}{n_0}$$

(b) Résoudre l'équation précédente en fonction des conditions initiales $r(z=0)$ et $r'(z=0)$. En déduire la matrice $ABCD$ du système. À quelle condition le système est-il stable ?

Correction

Résoudre l'équation précédente en fonction du signe de γ^2 :

— $\gamma^2 > 0$, soit $n_2 < 0$. On a alors une équation d'oscillateur harmonique. Avec les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $r'(0) = r'_0$, on trouve

$$r(z) = r_0 \cos(\gamma z) + \frac{r'_0}{n_0 \gamma} \sin(\gamma z)$$

On obtient l'expression de $r'(z)$ en dérivant l'équation ci-dessus. $r(z)$ restant borné, la focalisation est stable dans le milieu. On peut mettre sous forme matricielle la relation entre $r(z)$, $r'(z)$, r_0 et r'_0 :

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'un milieu GRIN stable :} \quad \begin{pmatrix} \cos(\gamma z) & \frac{1}{\gamma n_0} \sin(\gamma z) \\ -n_0 \gamma \sin(\gamma z) & \gamma \cos(\gamma z) \end{pmatrix}$$

— $\gamma^2 < 0$, soit $n_2 > 0$. On pose $\gamma^2 = -\mu^2$. Dans ce cas, les fonctions trigonométriques sont remplacées par des fonctions hyperboliques qui rendent la propagation instable :

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'un milieu GRIN instable :} \quad \begin{pmatrix} \cosh(\mu z) & \frac{1}{\mu n_0} \sinh(\mu z) \\ -n_0 \mu \sinh(\mu z) & \mu \cosh(\mu z) \end{pmatrix}$$

Les fibres optiques sont des exemples de matériaux à gradient d'indice à propagation stable ; l'indice optique est maximal au centre de la fibre, et diminue graduellement en s'éloignant de l'axe.

5. On s'intéresse cette fois à une variation axiale d'indice $n(z)$. Déterminer la matrice $ABCD$ après une traversée de longueur L de ce milieu.

Correction

On part à nouveau de l'équation des rayons, toujours projetée selon l'axe r . Dans cette question, $\partial_r n = 0$, on a donc : $\frac{d}{dz} \left(n \frac{dr}{dz} \right) = 0$. On trouve directement $r'(z) = \text{cste} = r'_0$. Pour déterminer la fonction $r(z)$, on intègre la relation précédente :

$$r(z) = r_0 + r'_0 \int_0^z \frac{1}{n(z)} dz$$

On obtient ainsi la matrice $ABCD$ suivante entre les plans $z = 0$ et $z :$

$$\text{Matrice } ABCD \text{ d'un milieu GRIN à variation axiale : } \begin{pmatrix} 1 & \int_0^z \frac{1}{n(z')} dz' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces milieux à variation d'indice le long de l'axe peuvent être utilisés en particulier pour limiter les aberrations géométriques d'un système optique, comme une lentille sphérique.

6. Un exemple d'application : la stabilité d'une cavité Fabry-Perot. On considère deux miroirs sphériques de rayons de courbure R_1 et R_2 espacés d'une distance L .

(a) Si la lumière fait n aller-retours, déterminer les nouvelles coordonnées r_n et r'_n .

Correction

Un aller-retour est constitué d'une propagation, d'une réflexion sur le miroir de gauche (R_1), une nouvelle propagation, et enfin d'une réflexion sur le miroir de droite (R_2). Le sens de propagation n'est pas à prendre en compte, puisque dans le calcul de la matrice d'un miroir, on a « déplié les rayons ».

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_1} & L \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & L \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{2L}{R_2}\right) - \frac{2L}{R_2} & L - \frac{2L^2}{R_1} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Au bout de n aller-retours, les coordonnées du rayon lumineux sont donc :

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r'_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix}$$

(b) La cavité est dite stable si le faisceau de lumière reste dans une zone bornée de l'espace. Étudier la stabilité de la cavité en fonction de L , R_1 et R_2 .

Correction

Pour étudier la stabilité de la cavité, il faut regarder le comportement de la matrice M^n lorsque n est grand. Pour cela, la méthode la plus appropriée est de commencer par diagonaliser M . Soit λ_+ et λ_- les deux valeurs propres de M associées aux vecteurs propres x_+ et x_- , ces deux vecteurs forment une base, sur laquelle on peut décomposer les coordonnées. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} = \alpha x_+ + \beta x_- \quad \text{alors} \quad \begin{pmatrix} r_n \\ r'_n \end{pmatrix} = \alpha \lambda_+^n x_+ + \beta \lambda_-^n x_-$$

Le vecteur de coordonnées reste donc borné à condition que les valeurs propres soient de module inférieur ou égal à 1.

Pour trouver ces valeurs propres, écrivons le polynôme caractéristique de M : $\lambda^2 - (\text{Tr } M)\lambda + \det M = 0$. Le déterminant de M vaut 1 comme toutes les matrices $ABCD$, et la trace vaut $A + D$. On définit le paramètre $m = (A + D)/2$, alors les valeurs propres s'écrivent

$$\lambda_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$$

et deux cas se présentent :

- Si $|m| \leq 1$, alors les racines sont complexes, et en posant $m = \cos \theta$, on trouve $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$. Élevées à la puissance n , les valeurs propres restent bornées, il s'agit donc d'un cas stable.
- Si $|m| > 1$ en revanche, les valeurs propres sont réelles. Et posant $m = \cosh \theta$, on a $\lambda_{\pm} = e^{\pm \theta}$. Nécessairement, une des deux valeurs propres diverge, et la cavité est instable.

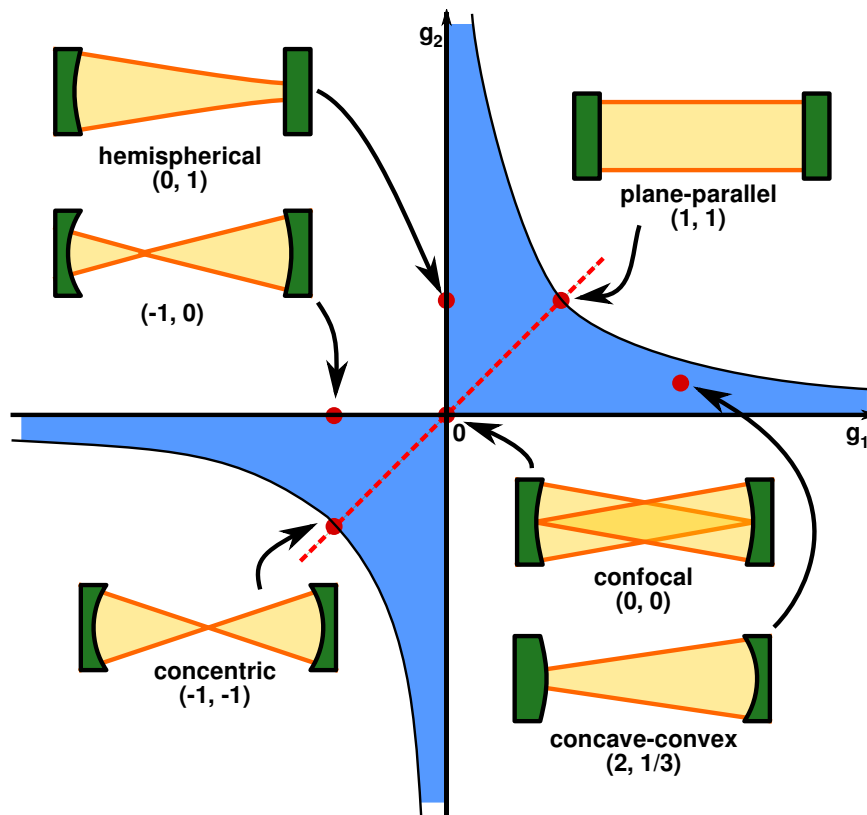
Regardons finalement ce que signifie la condition de stabilité $|m| \leq 1$:

$$-1 \leq \frac{A + D}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 1$$

En ajoutant 1 et divisant par 2 toute l'inégalité, celle-ci se factorise :

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1$$

On note conventionnellement g_1 et g_2 les deux facteurs de l'inégalité précédente. On obtient le diagramme de stabilité suivant (tiré de Wikipédia) :



2 Principe de Huygens-Fresnel et matrice $ABCD$

On a décrit jusqu'à maintenant la lumière dans le cadre de l'optique géométrique, on pourrait se demander si le formalisme des matrices $ABCD$ a un sens et une utilité dans le cadre de la diffraction (toujours en se cantonnant à l'optique paraxiale).

Pour simplifier le problème, on s'intéresse qu'à une seule direction transverse X (le raisonnement étant similaire sur Y). Le principe de Huygens-Fresnel unidimensionnel s'écrit :

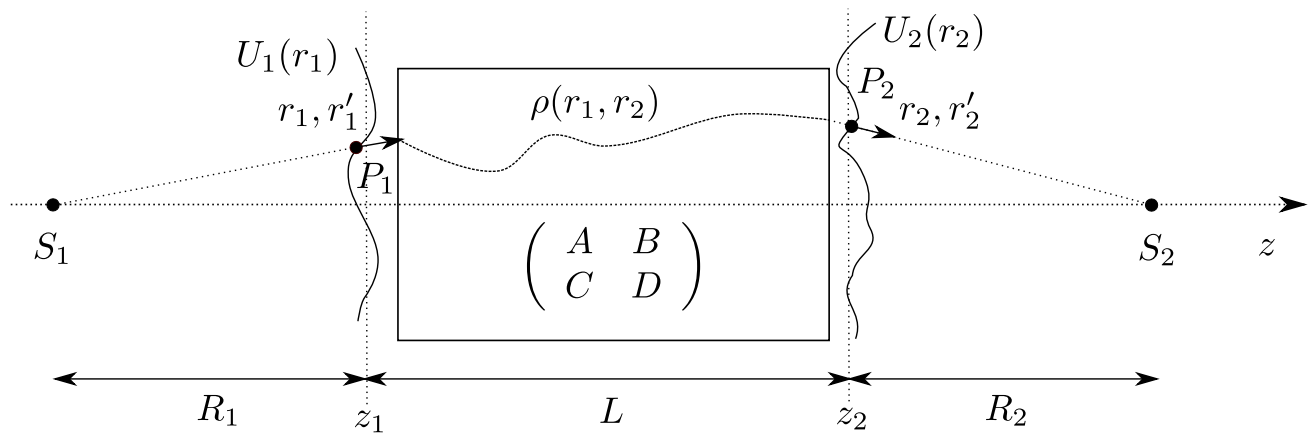
$$U_2(r_2) = \frac{1}{\sqrt{i\lambda L}} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(r_1) e^{ik\rho(r_1, r_2)} dr_1 \quad (3)$$

avec M_1 et M_2 de coordonnées r_1 et r_2 , et $\rho(r_1, r_2)$ le chemin optique entre M_1 et M_2 , approché dans l'approximation de Fresnel à

$$\rho(r_1, r_2) \simeq L + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2L} \quad (4)$$

où L est la distance sur l'axe z entre les deux points M_1 et M_2 . Pour faire simple, on pose $n_1 = n_2 = 1$, bien que cela ne soit pas indispensable.

Entre M_1 et M_2 , on intercale un système optique centré possédant une matrice $ABCD$. On note L_0 le chemin optique sur l'axe optique correspondant à la distance physique L .



7. Soit un point de coordonnées r_1, r_1' , qui ressort du système en r_2, r_2' . Trouver les positions des points S_1 et S_2 où les rayons incidents et sortants coupent l'axe optique. Ces deux valeurs R_1 et R_2 seront prises algébriquement à partir des plans $z = z_1$ et $z = z_2$, et on les exprimera en fonction de r_1, r_2 et des coefficients de la matrice $ABCD$.

Correction

Par définition, on a $r_1' = r_1/R_1$, soit $R_1 = r_1/r_1'$. On veut exprimer R_1 en fonction de r_1 et r_2 , donc il faut remplacer r_1' par son expression à l'aide des matrices $ABCD$:

$$\begin{cases} r_2 = Ar_1 + Br_1' \\ r_2' = Cr_1 + Dr_1' \end{cases} \implies r_1' = \frac{1}{B}(r_2 - Ar_1) \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_1 = \frac{Br_1}{r_2 - Ar_1}}$$

De même, on a $R_2 = r_2/r_2'$, et

$$r_2' = Cr_1 + Dr_1' = Cr_1 + D \frac{r_2 - Ar_1}{B} = \left(C - \frac{AD}{B}\right) r_1 + \frac{D}{B} r_2 = \frac{-r_1 + Dr_2}{B}$$

où on a utilisé que le déterminant de la matrice $ABCD$ était égal à 1. Finalement :

$$\boxed{R_2 = \frac{Br_2}{Dr_2 - r_1}}$$

8. Que peut-on dire des points S_1 et S_2 ?

Correction

Deux rayons passant par S_1 convergent en S_2 . Cela signifie que S_2 est l'image de S_1 par le système optique, et donc **les deux points sont conjugués**. Par le principe de Fermat, cela signifie que les deux rayons parcourent le même chemin optique.

9. Dans le cadre de l'optique paraxiale, en déduire l'expression de $\rho(r_1, r_2)$. Conclure sur l'utilisation des matrices $ABCD$ en diffraction.

Correction

De la question précédente, on déduit l'égalité des chemins optiques. Attention, $R_2 < 0$ avec l'orientation choisie :

$$\begin{aligned} R_1 + L_0 + (-R_2) &= \sqrt{r_1^2 + R_1^2} + \rho(r_1, r_2) + \sqrt{r_2^2 + R_2^2} \\ &\approx R_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{2R_1^2}\right) + \rho(r_1, r_2) + (-R_2) \left(1 + \frac{r_2^2}{2R_2^2}\right) \end{aligned}$$

où on a fait un DL au premier ordre. Ainsi on obtient l'expression pour ρ :

$$\rho(r_1, r_2) = L_0 + \frac{r_2^2}{2R_2} - \frac{r_1^2}{2R_1} = L_0 + \frac{r_2^2}{2} \frac{Dr_2 - r_1}{Br_2} - \frac{r_1^2}{2} \frac{r_2 - Ar_1}{Br_1}$$

Finalement :

$$\rho(r_1, r_2) = L_0 + \frac{1}{2B} (Ar_1^2 + Dr_2^2 - 2r_1r_2)$$

Le chemin optique s'exprime simplement en fonction de la matrice $ABCD$ du système optique traversé. Ainsi, les matrices $ABCD$ ne servent pas uniquement dans le cas de rayons d'optique géométrique, mais aussi lorsqu'en entrée du système arrive un front d'onde quelconque.

Attention, cela ne signifie pas que la diffraction à l'intérieur du système optique est prise en compte. En effet, la matrice $ABCD$ ne peut pas prendre en compte les diaphragmes éventuels. Si un diaphragme au milieu du système optique vient diffracter le front d'onde, il faudra couper le système en deux en sortant le diaphragme des systèmes optiques, et calculer une intégrale de Fresnel intermédiaire.

10. Retrouver le résultat d'une propagation libre.

Correction

Dans le cas de la propagation libre, $A = D = 1$, et $B = L$. On a

$$\rho(r_1, r_2) = L + \frac{1}{2L} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2) = L + \frac{1}{2L} (r_1 - r_2)^2$$

et on retrouve l'expression (4).

Remarque : De façon général, pour assurer la conservation de l'énergie, il faut généraliser le pré-facteur de l'intégrale de Fresnel : $\frac{1}{\sqrt{i\lambda L}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{i\lambda B}}$.

À retenir

En conclusion, le formalisme des matrices $ABCD$ est pratique pour calculer la propagation paraxiale de la lumière, même en présence de diffraction (extérieure au système optique traversé). La force de ce formalisme est qu'il permet également de comprendre comment se transforme une onde sphérique et surtout un faisceau gaussien en passant à travers un système optique.

On peut généraliser cette approche dans le cas de milieux non alignés avec l'axe optique (matrices $ABCDEF$), ou des milieux anisotropes (dans ce cas il y aura une matrice 4×4 avec les matrices $ABCD$ des axes x et y dans la diagonale, et potentiellement des termes de couplages).

Références

[1] Siegman, *Lasers*, ed. University Science Books (1986)