Arnaud RAOUX (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
https://www.phys.upmc.fr/∼araoux/

TD 6 : Le formalisme des matrices $ABCD$

La propagation de la lumière paraxiale suivant des lois linéaires, il est souvent pratique d'utiliser une description matricielle, qui permet de calculer de façon systématique la propagation à travers un ensemble complexe d'éléments optiques.

1 Matrices $ABCD$ en optique géométrique paraxiale

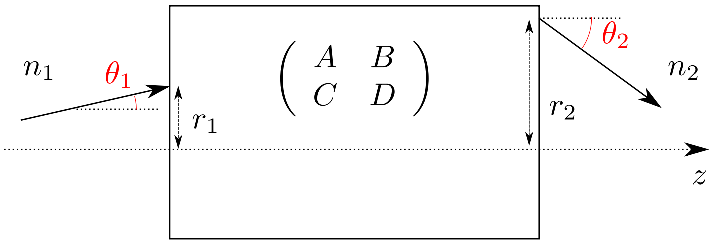


FIGURE 1 – Position du problème pour définir la matrice $ABCD$

On s'intéresse à la propagation d'un rayon lumineux dans un système centré (un milieu invariant par rotation) selon l'axe z de propagation. Soit r_1 (resp. r_2) la distance à l'axe z avant (resp. après) avoir franchi le système optique (cf. Fig. 1). On définit de plus la dérivée *réduite* $r' = n\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}$ faisant intervenir l'indice optique du milieu considéré. Ces quantités sont reliées par une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Cette matrice est une matrice de transfert caractéristique du système optique traversé, est souvent appelée (avec une originalité notable) matrice $ABCD$ (aussi *ray matrix* en anglais).

1. Donner la relation simple entre les angles indiqués sur la Fig. 1 et les dérivées réduites dans le cadre de l'optique paraxiale.

2. Déterminer les matrices $ABCD$ de ces différents cas, dans l'approximation de Gauss.
   (a) sur une distance L dans un milieu homogène d'indice n ;
   (b) à travers un dioptre plan entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 ;
   (c) d'un miroir sphérique ;
   (d) d'une lentille mince convergente de distance focale f'.

3. Grâce à ces blocs élémentaires, on peut construire les matrices de systèmes complexes. Considérons par exemple une lunette astronomique.
   (a) Faire le schéma suivi par un rayon lumineux ;
   (b) Calculer la matrice $ABCD$ de la lunette ;
   (c) En déduire son grandissement (rapport de longueurs) et son grossissement (rapport angulaire). Que remarque-t-on ?

4. On s'intéresse maintenant à des milieux non-homogènes. Par exemple une fibre à gradient d'indice (*GRIN fiber*), pour laquelle l'indice suit une relation quadratique $n(r) = n_0 + \frac{1}{2}n_2 r^2$. On rappelle l'équation des rayons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ n$$

où s est une abscisse curviligne.

(a) Dans l'approximation paraxiale, déterminer l'équation vérifiée par $r(z)$.

(b) Résoudre l'équation précédente en fonction des conditions initiales $r(z=0)$ et $r'(z=0)$. En déduire la matrice $ABCD$ du système. À quelle condition le système est-il stable ?

5. On s'intéresse cette fois à une variation axiale d'indice $n(z)$. Déterminer la matrice $ABCD$ après une traversée de longueur L de ce milieu.

6. Un exemple d'application : la stabilité d'une cavité Fabry-Perot. On considère deux miroirs sphériques de rayons de courbure R_1 et R_2 espacés d'un distance L.

(a) Si la lumière fait n aller-retours, déterminer les nouvelles coordonnées r_n et r'_n.

(b) La cavité est dite stable si le faisceau de lumière reste dans une zone bornée de l'espace. Étudier la stabilité de la cavité en fonction de L, R_1 et R_2.

2 Principe de Huygens-Fresnel et matrice $ABCD$

On a décrit jusqu'à maintenant la lumière dans le cadre de l'optique géométrique, on pourrait se demander si le formalisme des matrices $ABCD$ a un sens et une utilité dans le cadre de la diffraction (toujours en se cantonnant à l'optique paraxiale).

Pour simplifier le problème, on s'intéresse qu'à une seule direction transverse X (le raisonnement étant similaire sur Y). Le principe de Huygens-Fresnel unidimensionnel s'écrit :

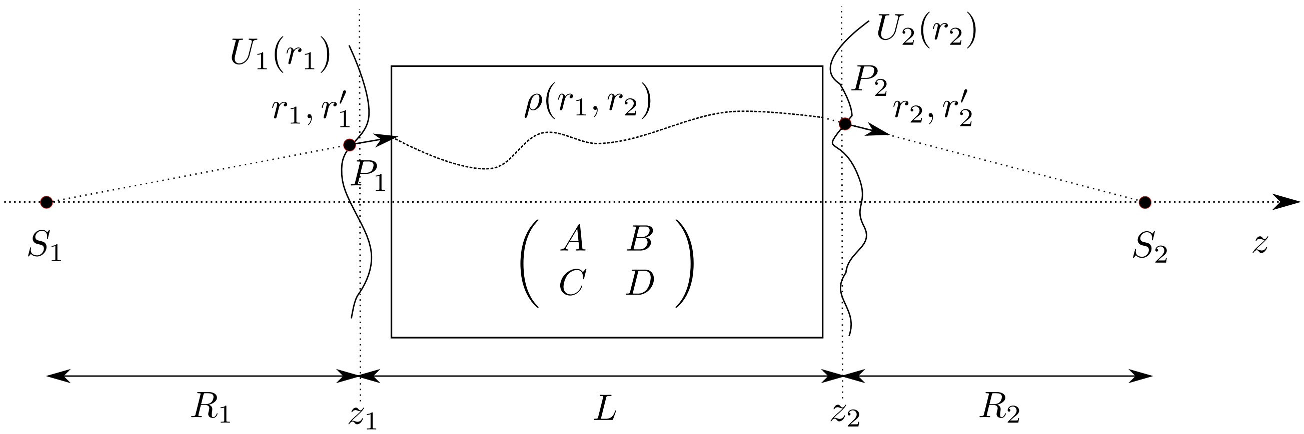
$$U_2(r_2) = \frac{1}{\sqrt{i\lambda L}} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(r_1)\, \mathrm{e}^{ik\rho(r_1,r_2)}\, \mathrm{d}r_1 \tag{2}$$

avec M_1 et M_2 de coordonnées r_1 et r_2, et $\rho(r_1, r_2)$ le chemin optique entre M_1 et M_2, approché dans l'approximation de Fresnel à

$$\rho(r_1, r_2) \simeq L + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2L} \tag{3}$$

où L est la distance sur l'axe z entre les deux points M_1 et M_2. Pour faire simple, on pose $n_1 = n_2 = 1$, bien que cela ne soit pas indispensable.

Entre M_1 et M_2, on intercale un système optique centré possédant une matrice $ABCD$. On note L_0 le chemin optique sur l'axe optique correspondant à la distance physique L.



7. Soit un point de coordonnées r_1, r'_1, qui ressort du système en r_2, r'_2. Trouver les positions des points S_1 et S_2 où les rayons incidents et sortants coupent l'axe optique. Ces deux valeurs R_1 et R_2 seront prises algébriquement à partir des plans $z = z_1$ et $z = z_2$, et on les exprimera en fonction de r_1, r_2 et des coefficients de la matrice $ABCD$.

8. Que peut-on dire des points S_1 et S_2 ?

9. Dans le cadre de l'optique paraxiale, en déduire l'expression de $\rho(r_1, r_2)$. Conclure sur l'utilisation des matrices $ABCD$ en diffraction.

10. Retrouver le résultat d'une propagation libre.

Références

[1] Siegman, *Lasers*, ed. University Science Books (1986)