Arnaud Raoux (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
https://www.phys.upmc.fr/∼araoux/

TD 5 : Diffraction des ondes lumineuses

Dans un modèle scalaire de la lumière, on considère un point source S émettant une onde d'amplitude $U_S(P) = \frac{A}{SP}\,\mathrm{e}^{ik\,SP}$, et un plan Σ, alors l'amplitude complexe $U(M)$ associée à une composante du champ électrique peut s'écrire comme :

$$U(M) = \frac{1}{i\lambda}\iint_{P\in\Sigma} K(\theta)\,U_S(P)\,t(P)\,\frac{\mathrm{e}^{ik\,PM}}{PM}\mathrm{d}S_P \tag{1}$$

où

— $U_S(P)$ est l'amplitude de l'onde issue de S au point P. Dans le cas d'une onde plane en incidence normale avec l'objet diffractant, celle-ci est constante $U_S(P) = U_S$.

— $t(P)$ est la fonction de transparence du plan Σ ; elle peut être complexe, dans ce cas l'objet diffractant déphasage l'onde incidente ;

— et $K(\theta)$ est un *facteur d'inclinaison* adimensionné qui dépend de l'angle θ entre la direction de SP et la normale au plan d'onde. Ce paramètre n'était pas présent dans la théorie initiale, et différentes théories de la diffraction donnent différentes valeurs pour la fonction K, mais elles s'accordent pour tendre vers 1 lorsque l'angle tend vers 0 (Kirchhoff, Rayleigh-Sommerfeld, Fresnel). On prendra par la suite $K(\theta) = 1$.

1 Tache de Poisson-Arago

En 1817, afin de trancher la question de la nature de la lumière, l'Académie des Sciences de Paris lança un concours sur le thème de la diffraction de la lumière, auquel Auguste Fresnel participa. Son mémoire laissa certains scientifiques sceptiques, dont Siméon Poisson, qui remarqua que sa formule prévoit l'existence d'une concentration de lumière derrière un obstacle circulaire, au centre de l'ombre géométrique. Ce résultat absurde invaliderait la théorie de Fresnel. Investiguons cette prédiction.

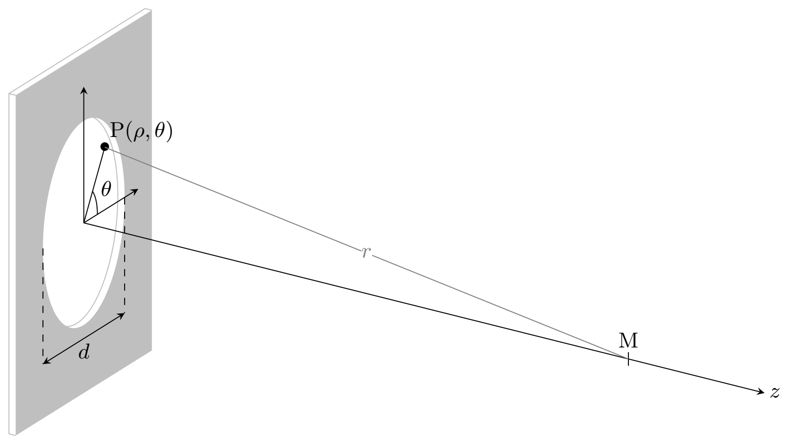

Figure 1 – Paramétrage de la diffraction par une ouverture circulaire. Schéma tiré de [4]

1. Calculer l'intensité lumineuse produite par une ouverture circulaire en un point M **sur** l'axe z (Fig. 1), on supposera le point source S très éloigné de l'ouverture, l'onde sphérique étant ainsi approximativement plane. Tracer cette intensité en fonction de z.

2. Simplifier cette expression dans le cas où l'écran est loin de l'ouverture, l'exprimer en fonction du *nombre de Fresnel* $\mathcal{F} = \frac{d^2}{z\lambda}$.

3. Déterminer une relation générale entre l'amplitude diffractée par une pupille, et celle diffractée par son motif complémentaire (ici un disque opaque de rayon d).

4. Conclure.

2 Régimes de diffraction : Fresnel vs. Fraunhofer

On suppose de plus l'objet diffractant strictement bidimensionnel, soit d sa taille caractéristique. Le principe de Huygens-Fresnel est basé sur des hypothèses importantes. Une approximation scalaire d'abord, mais également des approximations liées aux distances en jeu dans le problème : la taille de l'objet diffractant doit être grande devant la longueur d'onde $d > \lambda$ (sinon on verrait apparaître des de modes de cavité) et $z \gg \lambda$ (la zone de rayonnement). Donc λ doit être la plus petite distance du problème.

L'expression intégrale (1) est satisfaisante théoriquement, mais très difficile à utiliser en pratique dans toute sa généralité. Or dans la grande majorité des cas d'intérêt, d'autres approximations peuvent être faites pour simplifier le calcul cette intégrale.

On notera $(X, Y, 0)$ les coordonnées d'un point P dans le plan Σ, et (x, y, z) celles d'un point M sur l'écran.

5. L'objet est éclairé par une onde plane. On suppose placer l'écran « loin » de l'objet diffractant ($z \gg d$) [1]. Réécrire l'intégrale (1) avec les coordonnées de P et M. À quelles conditions peut-on simplifier cette intégrale ? On séparera les approximations sur l'amplitude et la phase de l'intégrale.

6. On fait l'approximation $\frac{d^4}{\lambda z^3} \ll 1$, en déduire une expression simplifiée de l'intégrale (1). Écrire cette intégrale comme une transformée de Fourier d'une fonction à définir. Cette intégrale est appelée *intégrale de Fresnel*.

7. On se place maintenant dans l'approximation $\mathcal{F} = \frac{d^2}{\lambda z} \ll 1$. Est-elle plus ou moins contraignant que l'approximation de Fresnel ? Simplifier l'intégrale de Fresnel. Quelle opération mathématique relie l'amplitude diffractée et la fonction de transparence ? On introduira des grandeurs homogènes à des fréquences spatiales. Nous sommes maintenant avec l'*intégrale de Fraunhofer*.

8. En séance de TP, est-on dans l'approximation de Fraunhofer ?

9. Dans l'approximation de Fraunhofer, calculer explicitement l'intensité diffractée pour une pupille rectangulaire de côtés a et b selon les axes X et Y respectivement. Tracer la figure de diffraction. Qu'obtient-on dans la limite d'une fente très longue ?

3 Diffraction par un ensemble de structures

On considère un ensemble de petites structures diffractantes identiques (ou motifs) réparties dans un objet de petite dimension devant la longueur d'observation z. On éclaire cet objet par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ. On étudie la figure de diffraction obtenue sur l'écran, dans l'approximation de Fraunhofer.

10. Montrer que la figure de diffraction de l'objet consiste en la figure de diffraction d'un motif, modulée par une fonction caractéristique de la répartition de ces motifs dans l'objet.

11. Dans le cas de motifs aléatoirement répartis, que donne l'intensité lumineuse ?

12. On considère maintenant une répartition périodique : un réseau de N fentes de largeur b, réparties sur une longueur $L = Na$ où a est la période de ce réseau. Calculer l'intensité diffractée par l'ensemble du réseau dans une direction donnée en fonction de l'intensité I_0, intensité mesurée au centre de la figure pour une fente unique.

Références

[1] Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company Edition.

[2] Champeau, *Ondes lumineuses*, de Boeck supérieur.

[3] Born & Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press.

[4] Site de Jimmy Roussel, PRAG de physique à l'ENSCR.

[5] https://vanderbei.princeton.edu/images/Questar/PoissonSpot.html.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Arago_spot.

[7] https://github.com/renjiezhu/Poisson-Spot-Simulator.

[8] Fruchart et al., *Physique expérimentale*, de Boeck supérieur.

[9] Page wikipédia anglaise "Arago spot".

[10] Site web de la préparation agrégation, page ressources

[11] Un protocole très simple pour obtenir expérimentalement la tache de Poisson-Arago

1. L'onde incidente est plane en incidence normale. Donc supposer l'objet petit $x, y \ll z$ est équivalent à supposer l'image petite $x', y' \ll z$.