

TD 4 : Lame diélectrique et miroir de Bragg

Les miroirs métalliques permettent difficilement d'obtenir un coefficient de réflexion en intensité R supérieur à 90%, le reste étant absorbé par le milieu. Cette réflexion est suffisante dans la vie quotidienne, mais pas en laboratoire ou lorsqu'on envoie une grande puissance lumineuse.

De façon contre-intuitive, les diélectriques peuvent se révéler d'excellents miroirs, bien meilleurs que les miroirs métalliques. L'objet de ce TD est d'explorer les possibilités qui s'offrent en empilant des couches de diélectriques sur une surface. L'étude sera grandement facilitée par l'utilisation du formalisme des matrices de transfert.

1 Ajout d'une lame diélectrique à une interface diélectrique

On considère une onde plane polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$ arrivant en incidence normale sur une interface vide / milieu d'indice n_0 .

- Pour une interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , démontrer les relations de Fresnel donnant les coefficients de réflexion et transmission en amplitude r et t en fonction des indices. En déduire le coefficient de réflexion en énergie d'une interface air/verre.

On s'intéresse à l'influence de l'ajout d'une lame diélectrique d'indice n à la surface d'un substrat diélectrique d'indice $n_0 > n$ quasi-infini. On sépare l'espace en trois zones : l'air d'indice proche de 1 (zone I), la couche diélectrique (zone II) d'épaisseur a et le substrat (zone III) qu'on considérera infini. La situation est schématisée par la Fig. 1.

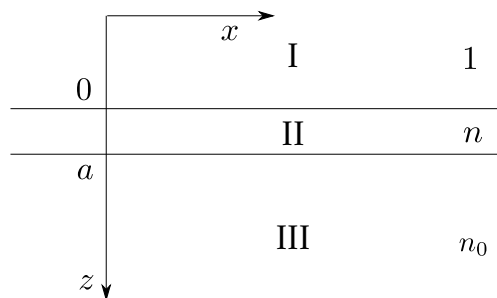


FIGURE 1 – Lame diélectrique d'épaisseur a et d'indice n à la surface d'un substrat d'indice n_0 .

- Avec des considérations d'interférences, montrer que l'épaisseur de la lame diélectrique influence la réflectivité du système dans son ensemble. Donner une condition sur cette épaisseur pour obtenir (1) une réflexion maximale (2) une transmission maximale. Ces conditions sont-elles modifiées si on remplace le milieu I par une couche du même substrat que dans la région III ?

Correction

Dans cette situation, l'onde sortante est composée de plusieurs rayons : le rayon directement réfléchi par l'interface I/II, mais aussi les rayons transmis par cette interface puis réfléchis par l'interface II/III. L'onde sortante est une interférence entre ces rayons.

Ce second type de rayon a parcouru un chemin optique supplémentaire. Celui ayant subi une réflexion sur l'interface I/II a un chemin optique supplémentaire $2na$, auquel il faut rajouter un déphasage φ dû à la réflexion sur un milieu plus réfringent ($r < 0$).

- Dans le cas où le milieu d'entrée est l'air, le rayon directement réfléchi prend un déphasage de π puisque $1 < n$. Le rayon (2) subit aussi un déphasage de π en $z = a$ puisque $n < n_0$. Finalement, la différence de marche vaut $\delta = 2na$, et on a des interférences constructives et une **réflexion maximale** pour $\delta = p\lambda_0$, c'est-à-dire pour des épaisseurs

$$a_p = p \frac{\lambda_0}{2n}, p \in \mathbb{Z}$$

Au contraire, on a une transmission maximale pour des interférences destructives, et donc des épaisseurs

$$a'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2n}, p \in \mathbb{Z}$$

— Dans le second cas, la réflexion du rayon (1) ne donne pas lieu à un déphasage de π car $n > n_0$. La condition d'interférences constructives devient donc $2na + \frac{\lambda_0}{2} = p\lambda_0$. Les formules de réflexion minimale/maximale sont inversées !

On écrit le champ électrique dans chaque zone de la figure 1 sous la forme :

$$\vec{E}_\ell = (E_\ell^+(z) + E_\ell^-(z)) e^{-i\omega t} \vec{e}_x = (E_\ell^+ e^{+ik_\ell z} + E_\ell^- e^{-ik_\ell z}) e^{-i\omega t} \vec{e}_x, \ell \in \{\text{I, II, III}\} \quad (1)$$

3. Justifier la forme du champ électrique ci-dessus. Préciser les sens de propagation de $E_\ell^\pm(z)$. Exprimer les vecteurs d'onde \vec{k}_ℓ dans les trois régions de l'espace. Pourquoi tous les champs ont-ils la même pulsation ? Par la suite, on notera $k_I = k$, et on remplacera k_{II} et k_{III} par leur expression en fonction de k .

Correction

Dans les milieux I et II, on peut décomposer le champ en deux composantes progressives contra-propageantes, donc avec des vecteurs d'ondes opposés. Dans le milieu III, on suppose le milieu infiniment grand, l'onde n'a donc pas l'occasion de se réfléchir au bout du substrat (en réalité, elle sera atténuée et partiellement absorbée avant d'arriver au bout du substrat), on n'a donc pas d'onde se propageant selon $-\vec{e}_z$ dans le milieu III.

$$\vec{k}_I = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_z := \vec{k} \quad \vec{k}_{II} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \vec{e}_z = n \vec{k} \quad \vec{k}_{III} = \frac{2\pi n_0}{\lambda_0} \vec{e}_z = n_0 \vec{k}$$

Implicitement, on a supposé que le milieu est un DLHI. Donc linéaire en particulier. Les équations de Maxwell étant linéaires, une excitation à ω ne peut donner lieu qu'à des réponses à ω . Toutes les ondes issues de l'onde incidente ont nécessairement la même pulsation. Autre justification plus mathématique : les fonctions $(e^{iax})_{a \in \mathbb{R}}$ forment une famille libre. Les conditions de continuité dérivant des équations de Maxwell imposent donc l'égalité des pulsations.

4. Calculer les champs magnétiques B_ℓ^\pm associés.

Correction

L'onde E_ℓ^\pm est une OPHPH. On peut donc calculer le champ magnétique associé facilement :

$$\vec{B}_\ell^\pm = \frac{\pm \vec{k}_\ell \wedge E_\ell^\pm \vec{e}_x}{\omega} = \pm \frac{n_\ell}{c} E_\ell^\pm \vec{e}_y.$$

5. **Interfaces :** On considère une interface entre milieux d'indices n_1/n_2 en $z = 0$ comme à la question 1. Déterminer la matrice d'interface I_{21} qui relie les amplitudes du champ électrique de part et d'autre de l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2 :

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = I_{21} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$I_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

et exprimer les coefficients ρ_{21} et τ_{21} . On montre que $(I_{21})^{-1} = I_{12}$, interpréter ce résultat. Calculer le déterminant de I_{21} .

Correction

On utilise la continuité des champs à l'interface (la composante transverse du champ électrique est toujours continue à une interface, et la composante transverse du champ magnétique est continue en l'absence de courants de surface et pour des milieux de même perméabilité), avec $z = 0$ et en éliminant la dépendance temporelle qui se simplifie :

$$\begin{aligned} E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ + E_2^- \\ n_1(E_1^+ - E_1^-) &= n_2(E_2^+ - E_2^-) \end{aligned}$$

ou en version matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_2 & -n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

d'où

$$I_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_2 & -n_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2n_2} \begin{pmatrix} -n_2 & -1 \\ -n_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_1 & -n_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_{21} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \tau_{21} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}.$$

La relation $(I_{21})^{-1} = I_{12}$ est attendue, c'est une reformulation du principe de retour inverse de la lumière.

Pour le déterminant :

$$\det I_{21} = \frac{1 - \rho_{21}^2}{\tau_{21}^2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

- 6. Propagation :** Déterminer la matrice $P_\ell(z_2; z_1)$ qui relie les amplitudes des champs en deux points z_1 et z_2 d'un même milieu ℓ et s'exprime sous la forme

$$\begin{pmatrix} E_\ell^+(z_2) \\ E_\ell^-(z_2) \end{pmatrix} = P_\ell(z_2; z_1) \begin{pmatrix} E_\ell^+(z_1) \\ E_\ell^-(z_1) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On l'exprimera en fonction de $\varphi(z) = k_0 n_\ell z$. Montrer qu'elle ne dépend que de $z = z_2 - z_1$, on l'écrira donc $P_\ell(z)$. Calculer le déterminant de $P_\ell(z)$.

Correction

On a simplement

$$\begin{aligned} E_\ell^+(z_2) &= E_\ell^+ e^{ik_\ell z_2} = E_\ell^+(z_1) e^{ik_\ell(z_2 - z_1)} = E_\ell^+(z_1) e^{i\varphi(z)} \\ E_\ell^-(z_2) &= E_\ell^- e^{-ik_\ell z_2} = E_\ell^-(z_1) e^{-ik_\ell(z_2 - z_1)} = E_\ell^-(z_1) e^{-i\varphi(z)} \end{aligned}$$

D'où

$$P_\ell(z) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(z)} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi(z)} \end{pmatrix}.$$

On a bien sûr $\det P_\ell(z) = 1$.

- 7.** Exprimer sous forme matricielle le champ en $z = a$ dans le milieu III en fonction du champ en $z = 0$ dans le milieu I. L'écriture fera apparaître un produit de matrices, dont on notera M le résultat.

Correction

$$\begin{pmatrix} E_{\text{III}}^+ \\ E_{\text{III}}^- \end{pmatrix} (z = a) = \underbrace{I_{\text{III,II}} P_{\text{II}}(a) I_{\text{II,I}}}_{=M} \begin{pmatrix} E_{\text{I}}^+ \\ E_{\text{I}}^- \end{pmatrix} (z = 0)$$

- 8.** Comment peut-on définir le coefficient de réflexion r du système à partir des amplitudes E_ℓ^\pm ? On suppose le milieu III infini, donc sans onde se dirigeant vers les z négatifs dans ce milieu. En déduire une expression de r le coefficient de réflexion en amplitude du système en fonction des coefficients M_{ij} . Pour s'épargner un calcul élémentaire mais fastidieux, on admet qu'il s'écrit

$$r = \frac{n(1 - n_0) - i(n_0 - n^2) \tan \phi}{n(1 + n_0) - i(n_0 + n^2) \tan \phi} \quad (5)$$

avec $\phi = nka$.

Correction

Une définition naturelle pour le coefficient de réflexion :

$$r = \frac{E_1^-}{E_1^+}$$

Pour trouver son expression, on utilise la question précédente : sans onde retour dans le milieu III, on a :

$$0 = M_{21}E_1^+ + M_{22}E_1^- \quad \text{d'où} \quad r = -\frac{M_{21}}{M_{22}}.$$

Reste à exprimer la matrice M ...

$$M = \frac{1}{\tau_{32}\tau_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{32} \\ \rho_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_{32}\tau_{21}} \begin{pmatrix} e^{i\phi} + \rho_{32}\rho_{21}e^{-i\phi} & \rho_{21}e^{i\phi} + \rho_{32}e^{-i\phi} \\ \rho_{32}e^{i\phi} + \rho_{21}e^{-i\phi} & \rho_{32}\rho_{21}e^{i\phi} + e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

On peut exprimer r :

$$r = -\frac{\rho_{32}e^{i\phi} + \rho_{21}e^{-i\phi}}{\rho_{32}\rho_{21}e^{i\phi} + e^{-i\phi}} = -\frac{(\rho_{32} + \rho_{21})\cos\phi + i(\rho_{32} - \rho_{21})\sin\phi}{(\rho_{32}\rho_{21} + 1)\cos\phi + (\rho_{32}\rho_{21} - 1)\sin\phi}$$

En utilisant ensuite les expressions $\rho_{32} = \frac{n-n_0}{n+n_0}$ et $\rho_{21} = \frac{1-n}{1+n}$, on trouve finalement en isolant r :

$$\begin{aligned} r &= \frac{n(1-n_0)\cos\phi + i(n^2-n_0)\sin\phi}{n(1+n_0)\cos\phi + i(-n^2-n_0)\sin\phi} \\ &= \frac{n(1-n_0) + i(n^2-n_0)\tan\phi}{n(1+n_0) - i(n^2+n_0)\tan\phi}. \end{aligned}$$

9. Commenter le cas $n = n_0$, puis le cas $a \rightarrow 0$. De même, commenter les valeurs de r pour les ϕ particuliers de la question 1.

Correction

Si $n = n_0$, il n'y a qu'une seule interface $1/n_0$. Le calcul permet de retrouver le coefficient de la formule de Fresnel en incidence normale :

$$r = \frac{1-n_0}{1+n_0}$$

Si $a \rightarrow 0$, alors $\tan\phi \rightarrow 0$. Ainsi $r \rightarrow \frac{1-n_0}{1+n_0}$, on retrouve le cas précédent. Le système agit comme une unique interface entre les milieux I et III, la propagation dans le milieu II n'a pas le temps de déphaser le champ.

Si la lame est d'une épaisseur telle que $\phi = 0[\pi]$, alors on a le même résultat que précédemment. Cette situation correspond à des interférences constructives pour les ondes réfléchies, donc au maximum de réflexion. On notera ce résultat très contre-intuitif : en ajoutant une lame intermédiaire, le maximum de réflexion qu'on peut atteindre est celui de l'interface sans lame intermédiaire !

Si la lame est d'épaisseur $\phi = \pi/2[\pi]$, alors le coefficient de réflexion se simplifie en

$$r = \frac{n_0 - n^2}{n_0 + n^2}.$$

On voit qu'on peut annuler le coefficient r pour un indice de lame bien choisi $n = \sqrt{n_0}$. Cependant, cela ne fonctionne que pour une seule longueur d'onde !

10. (Python) Tracer la fonction R en fonction de la longueur d'onde λ_0 du rayonnement incident. On choisira différentes épaisseurs de lame, telles que celles-ci sont maximales réfléchissantes pour $\lambda_0 = 540$ nm.

Correction

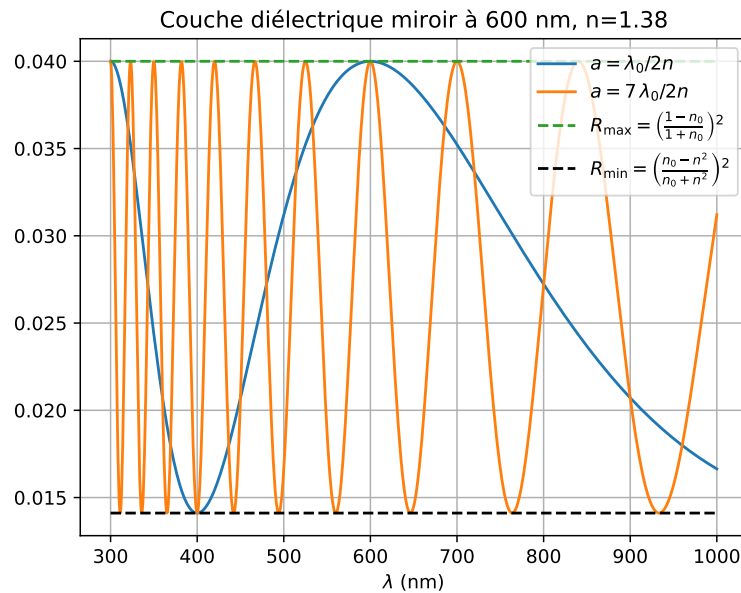
Une étude d'extremum de $R = |r|^2$ en fonction de n à ϕ fixé montre que l'extremum est atteint pour $n = \sqrt{n_0}$. On a alors

$$R = \frac{(1-n_0)^2}{(1+n_0)^2 + 2\sqrt{n_0}\tan\phi}.$$

On trouve donc qu'avec cette valeur d'indice, R varie entre 0 et $R_{\max} = \left(\frac{1-n_0}{1+n_0}\right)^2$.

Pour n différent de cette valeur, R variera dans une plus petite plage. Si on s'intéresse à R comme fonction de λ , on voit les extrema $R_{\min} = \left(\frac{n_0-n^2}{n_0+n^2}\right)^2$ et $R_{\max} = \left(\frac{1-n_0}{1+n_0}\right)^2$.

Pour une référence $\lambda_0 = 600$ nm, on trace le graphe de R pour deux lames : une d'épaisseur $\lambda_0/2n$ et une d'épaisseur $(2p+1)\lambda_0/2n$ avec $p=3$. Si les deux donnent effectivement une réflectivité maximale en λ_0 , leur comportement est très différent : celle plus épaisse est nettement plus sélective en longueur d'onde, alors que l'épaisseur la plus fine garde une grande réflectivité pour une large plage de longueurs d'onde proches de λ_0 .



Application au traitement antireflets

11. On cherche à minimiser la réflexion de l'onde lumineuse à une interface air/diélectrique (pour des verres de lunettes, des lentilles de laboratoire, etc.), en ajoutant une couche d'indice n . Quelle est la valeur de l'indice minimisant la réflexion si $n_0 = 1,5$ pour du verre standard BK7 (variation de l'indice du BK7) ?

Correction

Dans la question 1., on a maximisé la réflexion. Si on veut l'inverse, il faut avoir des interférences destructives, à savoir $a = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{2n}$, d'où $\phi = kan = (p + \frac{1}{2}) \pi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Le $\tan \phi$ diverge, ce qui permet de simplifier l'expression de r :

$$r = \frac{n(1-n_0) + i(n_0-n^2) \tan \phi}{n(1+n_0) + i(n_0+n^2) \tan \phi} \approx \frac{n_0-n^2}{n_0+n^2}$$

Minimiser la réflexion revient donc à minimiser $|r|$, soit à prendre $n = \sqrt{n_0} = 1,24$.

Attention, dans ce cas on a choisi une épaisseur qui permette certes de minimiser r , mais pour UNE longueur d'onde donnée.

12. Malheureusement, on ne connaît pas de matériau de cet indice. On utilise en pratique du fluorure de magnésium d'indice $n = 1,38$. Comparer les coefficients de réflexion avec et sans traitement antireflets.

Correction

$$r_{\text{sans a.r.}} = \frac{1-1,5}{1+1,5} = -20\% \quad \text{et} \quad r_{\text{avec a.r.}} = \frac{1,5-1,38^2}{1,5+1,38^2} = -12\%$$

soit en termes d'énergie : $r_{\text{sans a.r.}}^2 = 4\%$ et $r_{\text{avec a.r.}}^2 = 1,4\%$.

13. Estimer la transmission à travers le système optique de la Fig. 2 si les optiques sont avec ou sans traitement antireflets.

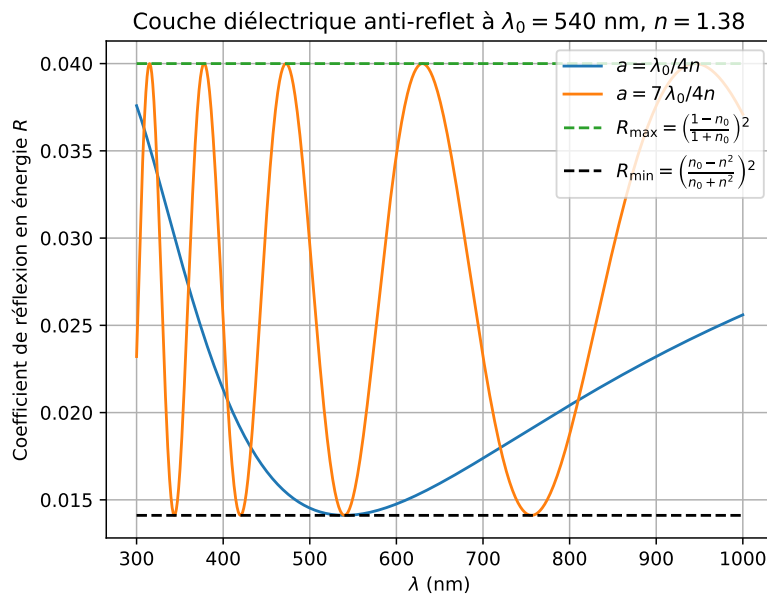
Correction

À chaque traversée d'une lentille, on a deux interfaces symétriques, il reste donc $(1 - r^2)^2$ du faisceau incident. Sur la figure 2, il y a une cinquantaine de lentilles, soit donc un coefficient global de transmission en énergie : $(1 - r^2)^{100}$. Avec traitement antireflets, cela fait une transmission de 24%, alors que sans traitement 1,6%.

14. À l'aide de la question 1., justifier que les reflets résiduels des verres de lunette ayant subi un traitement antireflets ont une couleur violette (ou pas !)

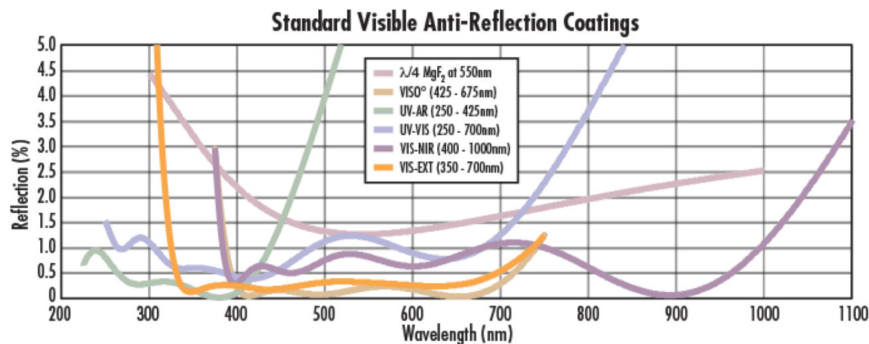
Correction

En fait cette question est loin d'être évidente. Si on prend naïvement le traitement comme une application de la partie précédente, et consiste donc en un dépôt d'une monocouche, on a naturellement envie de maximiser l'effet au milieu du spectre visible (plus précisément à la longueur d'onde la mieux vue par l'œil humain), c'est-à-dire vers 540 nm. Le vert étant proche de cette longueur d'onde, ça devrait être la longueur d'onde la plus transmise, et donc avoir des reflets rouge et violets. On observe (des fois) l'inverse !



Les reflets verts doivent donc avoir une autre origine. Probablement que les fabricants essaient d'obtenir deux minima de réflectivité dans le spectre visible (au lieu d'un seul), par exemple vers 450 nm et 600 nm. C'est ce que le site <http://opticcadd.free.fr/antireflet.htm> semble indiquer.

Un exemple de la diversité des traitements antireflets selon les applications est présenté sur la figure suivante tirée du site d'Edmund Optics. Le traitement donnant des reflets verts est probablement similaire à UV-VIS.



Remarque : une technique qui n'est pas utilisée (à ma connaissance) pour les lunettes, mais qui peut l'être pour des lentilles de laboratoire ou des objectifs d'appareil photo ou de microscope pour agrandir la plage de longueurs d'onde sur laquelle les reflets sont faibles, il est aussi possible d'utiliser la dispersion du matériau. En effet, on a

considéré n comme une constante, alors qu'il dépend de façon générale de λ . On entre ensuite dans des questions d'ingénierie complexes.



FIGURE 2 – Exemple d'un montage d'optique dédié à l'étude des atomes froids. Image tirée du compte Twitter de l'équipe MBQD à Cambridge.

2 Miroir de Bragg : un exemple de cristal photonique unidimensionnel

Dans la partie précédente, nous avons réussi à minimiser un coefficient de réflexion grâce au dépôt d'une couche diélectrique. Cette minimisation n'est valable que pour une longueur d'onde spécifique. De plus on a vu que la présence d'une couche ne modifiait pas la réflexion maximale sur le système.

En utilisant non pas une mais plusieurs couches, il est possible de changer la réflexion maximale du système. Dans cette partie, on cherche à construire un système qui réfléchit parfaitement une **bande** de longueurs d'onde.

15. On accole deux lames diélectriques d'indices n_1 et n_2 et d'épaisseurs a_1 et a_2 . Exprimer sous forme matricielle les amplitudes en $a_1 + a_2$ dans le milieu d'indice n_1 en fonction des amplitudes en $z = 0$ dans le même milieu. La matrice obtenue s'appelle matrice de transfert T_c du système. On posera $\tau = \sqrt{\tau_{12}\tau_{21}}$, $\rho = \rho_{21}$, $\phi_1 = n_1ka_1$ et $\phi_2 = n_2ka_2$.

Correction

La matrice d'un motif s'écrit $T_c = I_{12}P_2(a_2)I_{21}P_1(a_1)$, soit

$$T_c = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}.$$

16. Calculer le déterminant de T_c . Calculer de plus explicitement ses éléments diagonaux. En déduire l'équation vérifiée par les valeurs propres de T_c .¹ On notera

$$A = \frac{1}{\tau^2} [\cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2. \quad (6)$$

et on ne cherchera pas à montrer la deuxième égalité de l'équation précédente.

Correction

On a $\det T_c = \frac{n_2}{n_1} \times 1 \times \frac{n_1}{n_2} \times 1 = 1$. De plus

$$T_c = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} e^{i(\phi_1+\phi_2)} - \rho^2 e^{i(\phi_1-\phi_2)} & \star \\ \star & e^{-i(\phi_1+\phi_2)} - \rho^2 e^{-i(\phi_1-\phi_2)} \end{pmatrix}$$

Alors, les valeurs propres étant des zéros du polynôme caractéristique, elles vérifient

$$\lambda^2 - \frac{2}{\tau^2} (\cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \lambda + 1 = 0$$

1. On rappelle que le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 s'écrit $P_M(X) = X^2 - (\text{Tr } M)X + \det M$.

soit

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0$$

17. On note S_N la matrice de transfert après N bicouches. Exprimer S_N en fonction de T_c puis en fonction de la matrice D diagonale telle que $T_c = P^{-1}DP$. Montrer que le coefficient de réflexion en intensité après N bicouches s'écrit

$$R_N = \left| \frac{S_{N,21}}{S_{N,22}} \right|^2 = \left| \frac{(S_N^{-1})_{21}}{(S_N^{-1})_{11}} \right|^2. \quad (7)$$

Correction

On procède comme précédemment : on suppose le champ retour nul à droite, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} E_N^+ \\ 0 \end{pmatrix} = S_N \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} (z = 0)$$

et on en tire le coefficient de réflexion :

$$r_N = -\frac{S_{N,21}}{S_{N,22}} \quad \text{d'où} \quad R_N = \left| \frac{S_{N,21}}{S_{N,22}} \right|^2$$

On peut aussi écrire $(S_N)^{-1} \begin{pmatrix} E_N^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} (z = 0)$, d'où on tire l'expression équivalente $r = \frac{(S_N^{-1})_{21}}{(S_N^{-1})_{11}}$.

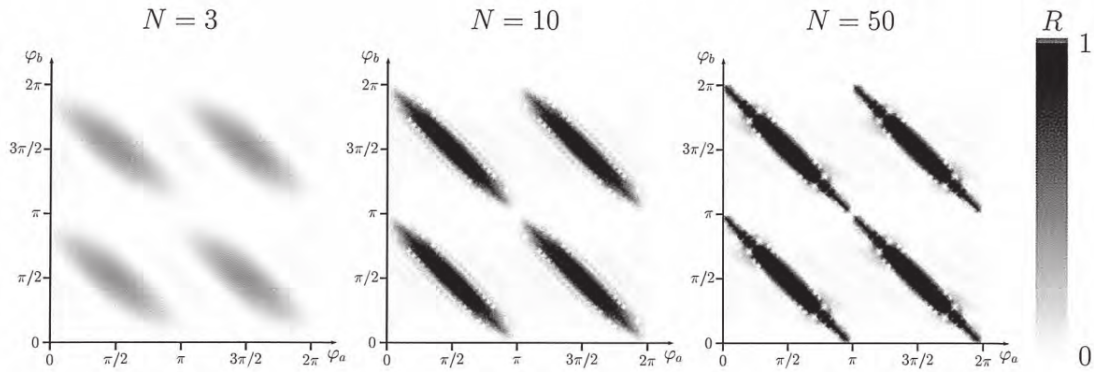


FIGURE 3 – Coefficient de réflexion pour un multi-bicouches

18. La figure 3 représente la fonction de réflexion $R_N(\phi_1, \phi_2)$ pour différents N . Donner les valeurs de ϕ_1 et ϕ_2 pour lesquelles R_N est maximale. On les notera $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$ respectivement.

Correction

On voit graphiquement que le maximum est atteint lorsque $\phi_1 = \tilde{\phi}_1 = \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\phi_2 = \tilde{\phi}_2 = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

19. Pour les valeurs $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$, les matrices D^{-1} et P s'expriment simplement :

$$D^{-1} = -\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & 0 \\ 0 & (1-\rho)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

et en déduire que

$$R_N = \left| \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \right|^2 \quad (9)$$

Correction

On calcule les éléments de matrice pertinents :

$$\begin{aligned} S_N^{-1} &= P^{-1}D^{-1}P = -\frac{1}{\tau^{2N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\rho)^{2N} & 0 \\ 0 & (1-\rho)^{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\tau^{2N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\rho)^{2N} & -(1+\rho)^{2N} \\ (1-\rho)^{2N} & (1-\rho)^{2N} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\tau^{2N}} \begin{pmatrix} (1+\rho)^{2N} + (1-\rho)^{2N} & (1-\rho)^{2N} - (1+\rho)^{2N} \\ \star & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$R_N = \left| \frac{(1-\rho)^{2N} - (1+\rho)^{2N}}{(1+\rho)^{2N} + (1-\rho)^{2N}} \right|^2 = \left| \frac{\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2N} - 1}{1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2N}} \right|^2$$

Enfin, on a

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1 - \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}}{1 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}} = \frac{n_1}{n_2}$$

D'où le résultat recherché.

20. On réalise un empilement de $N = 40$ bicouches de GaAs/AlAs, d'indices $n_{\text{GaAs}} = 3,3$ et $n_{\text{AlAs}} = 2,9$. Calculer la réflectivité du miroir pour $\lambda = 1 \mu\text{m}$. Quelle est l'épaisseur minimale de l'empilement ?

Correction

Un calcul donne $R_{40} = 0,99987$.

L'épaisseur minimale de l'empilement est donné par

$$40 \times \left(\frac{\lambda}{4n_1} + \frac{\lambda}{4n_2} \right) = 40 \times (76 \text{ nm} + 86 \text{ nm}) = 6,5 \mu\text{m}.$$

21. La symétrie de la figure 3 montre qu'on peut calculer la bande passante du miroir sur la ligne $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Dans la zone de réflexion, $|A| \geq 1$. En déduire la bande passante $\Delta\lambda$ du miroir en fonction de n_1, n_2 et $\lambda_0 = 4n_1a_1 = 4n_2a_2$ la longueur d'onde adaptée.

Correction

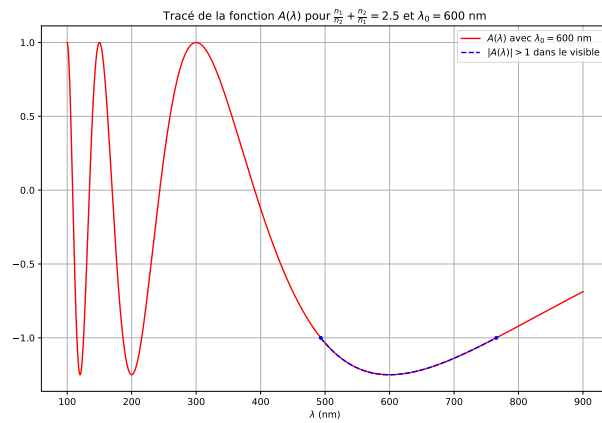
Dans ce cas, écrivons $A = \cos^2 \phi - b \sin^2 \phi$ où $b = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) > 0$. On peut étudier cette fonction pour trouver lorsque $|A| > 1$:

— $A > 1$ signifie $\cos^2 \phi > 1 + b \sin^2 \phi > 1$. C'est impossible.

— $A < -1$ signifie $\cos^2 \phi \leq -1 + b \sin^2 \phi$ soit $\sin^2 \phi \geq \frac{2}{1+b}$. On note $\phi_1 = \text{asin} \sqrt{\frac{2}{1+b}}$. On cherche des ϕ positifs, l'intervalle des ϕ possibles est donc $[\phi_1, \pi - \phi_1]$. La largeur en ϕ vaut $\pi - 2\phi_1$.

On se rappelle de la relation $\phi = nka = \frac{2\pi}{\lambda} na$. On a choisit des épaisseurs telles que $n_i a_i = \frac{\lambda_0}{4}$, donc $\lambda = \frac{\pi}{2\phi} \lambda_0$. Donc l'intervalle en longueur d'onde s'écrit

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \in \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \text{asin} \sqrt{2/(1+b)}}; \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{asin} \sqrt{2/(1+b)}} \right] = [493; 766] \text{ nm}$$

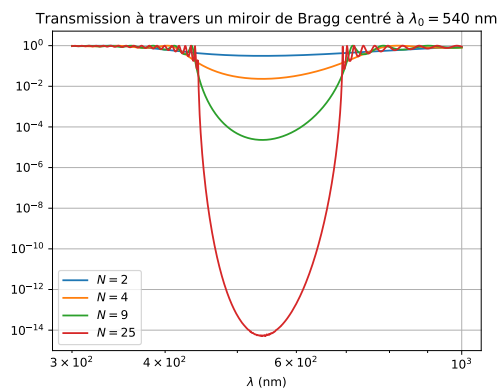
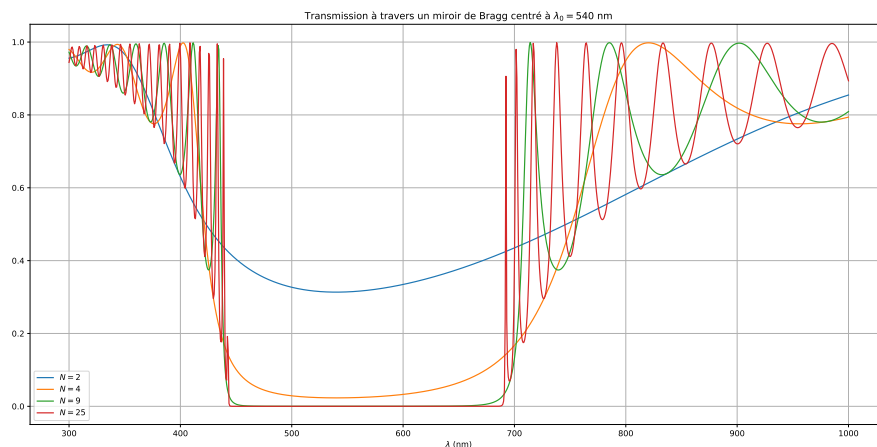


22. (Python) Tracer la courbe de transmission du champ électrique en fonction de la longueur d'onde pour $N = 2, 5, 10$ et 15 .

Correction

Le tracé des courbes de transmission se fait en plusieurs étapes :

- D'abord écrire l'expression du coefficient R en fonction des paramètres de la matrice de transfert. Il s'agit de généraliser ce qui a été fait précédemment pour une couche particulière.
- On implémente ensuite la matrice de transmission d'une lame
- On définit la fonction pour un empilement de N fois l'enchaînement de deux lames.
- On calcule et on trace R (ou T).



Évolution de la transmission de miroirs de Bragg en fonction du nombre de couches déposées. À gauche en échelle linéaire, à droite logarithmique.

23. Dans quel autre domaine de la physique rencontre-t-on des bandes interdites ?

Correction

Cela ressemble à la physique du solide, où un enchaînement de motifs cristallins provoque l'apparition de bandes électroniques.

À retenir

- ★ **Traitement anti-reflet** l'ajout d'une lame diélectrique sur une interface peut drastiquement améliorer la transmission d'un système optique éliminer une grande partie des réflexions non-voulues. Il y a deux conditions (une sur la phase, une sur l'amplitude des ondes). C'est une adaptation d'impédance. En revanche, cela ne permet pas d'améliorer la réflectivité de l'interface : la réflectivité maximale atteignable est exactement la réflectivité de l'interface sans la lame diélectrique.
- ★ Les traitements anti-reflets des verres sont basés sur ce principe : traiter les verres avec une couche diélectrique $\lambda/4$ centrée sur le vert. Il existe cependant d'autres traitements (par exemple avec deux, trois couches réfléchissantes)
- ★ Il est possible d'augmenter la réflexion d'une interface en ajoutant plusieurs couches diélectriques. En particulier, ajouter un empilement de couches permet d'avoir une transmission nulle pour toute une bande de longueur d'onde. C'est un cristal pour photons : un cristal photonique.

Références

- [1] Énoncé de TD du cours *Optique et Lasers* donné à l'ENS Cachan en 2009.
- [2] Sujet de l'épreuve C 2014 du concours de l'agrégation de physique.