

TD 4 : lame diélectrique et miroir de Bragg

Les miroirs métalliques permettent difficilement d'obtenir un coefficient de réflexion en intensité R supérieur à 90%, le reste étant absorbé par le milieu. Cette réflexion est suffisante dans la vie quotidienne, mais pas en laboratoire ou lorsqu'on envoie une grande puissance lumineuse.

De façon contre-intuitive, les diélectriques peuvent se révéler d'excellents miroirs, bien meilleurs que les miroirs métalliques. L'objet de ce TD est d'explorer les possibilités qui s'offrent en empilant des couches de diélectriques sur une surface. L'étude sera grandement facilitée par l'utilisation du formalisme des matrices de transfert.

1 Ajout d'une lame diélectrique à une interface diélectrique

On considère une onde plane polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$ arrivant en incidence normale sur une interface vide / milieu d'indice n_0 .

1. Pour une interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , démontrer les relations de Fresnel donnant les coefficients de réflexion et transmission en amplitude \underline{r} et \underline{t} en fonction des indices. En déduire le coefficient de réflexion en énergie d'une interface air/verre.

On s'intéresse à l'influence de l'ajout d'une lame diélectrique d'indice n à la surface d'un substrat diélectrique d'indice $n_0 > n$ quasi-infini. On sépare l'espace en trois zones : l'air d'indice proche de 1 (zone I), la couche diélectrique (zone II) d'épaisseur a et le substrat (zone III) qu'on considérera infini. La situation est schématisée par la Fig. 1.

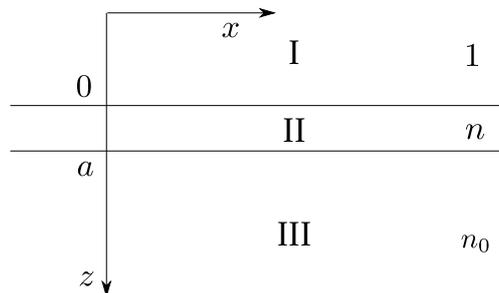


FIGURE 1 – lame diélectrique d'épaisseur a et d'indice n à la surface d'un substrat d'indice n_0 .

2. Avec des considérations d'interférences, montrer que l'épaisseur de la lame diélectrique influence la réflectivité du système dans son ensemble. Donner une condition sur cette épaisseur pour obtenir (1) une réflexion maximale (2) une transmission maximale. Ces conditions sont-elles modifiées si on remplace le milieu I par une couche du même substrat que dans la région III?

On écrit le champ électrique dans chaque zone de la figure 1 sous la forme :

$$\vec{E}_\ell = (E_\ell^+(z) + E_\ell^-(z)) e^{-i\omega t} \vec{e}_x = (E_\ell^+ e^{+ik_\ell z} + E_\ell^- e^{-ik_\ell z}) e^{-i\omega t} \vec{e}_x, \quad \ell \in \{I, II, III\} \quad (1)$$

3. Justifier la forme du champ électrique ci-dessus. Préciser les sens de propagation de $E_\ell^\pm(z)$. Exprimer les vecteurs d'onde \vec{k}_ℓ dans les trois régions de l'espace. Pourquoi tous les champs ont-ils la même pulsation? Par la suite, on notera $k_I = k$, et on remplacera k_{II} et k_{III} par leur expression en fonction de k .
4. Calculer les champs magnétiques B_ℓ^\pm associés.
5. **Interfaces :** On considère une interface entre milieux d'indices n_1/n_2 en $z = 0$ comme à la question 1. Déterminer la matrice d'interface I_{21} qui relie les amplitudes du champ électrique de part et d'autre de l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2 :

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = I_{21} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$I_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

et exprimer les coefficients ρ_{21} et τ_{21} . On montre que $(I_{21})^{-1} = I_{12}$, interpréter ce résultat. Calculer le déterminant de I_{21} .

- 6. Propagation :** Déterminer la matrice $P_\ell(z_2; z_1)$ qui relie les amplitudes des champs en deux points z_1 et z_2 d'un même milieu ℓ et s'exprime sous la forme

$$\begin{pmatrix} E_\ell^+(z_2) \\ E_\ell^-(z_2) \end{pmatrix} = P_\ell(z_2; z_1) \begin{pmatrix} E_\ell^+(z_1) \\ E_\ell^-(z_1) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On l'exprimera en fonction de $\varphi(z) = k_0 n_\ell z$. Montrer qu'elle ne dépend que de $z = z_2 - z_1$, on l'écrira donc $P_\ell(z)$. Calculer le déterminant de $P_\ell(z)$.

- 7.** Exprimer sous forme matricielle le champ en $z = a$ dans le milieu III en fonction du champ en $z = 0$ dans le milieu I. L'écriture fera apparaître un produit de matrices, dont on notera M le résultat.
- 8.** Comment peut-on définir le coefficient de réflexion r du système à partir des amplitudes E_ℓ^\pm ? On suppose le milieu III infini, donc sans onde se dirigeant vers les z négatifs dans ce milieu. En déduire une expression de r le coefficient de réflexion en amplitude du système en fonction des coefficients M_{ij} . Pour s'épargner un calcul élémentaire mais fastidieux, on admet qu'il s'écrit

$$r = \frac{n(1 - n_0) - i(n_0 - n^2) \tan \phi}{n(1 + n_0) - i(n_0 + n^2) \tan \phi} \quad (5)$$

avec $\phi = nka$.

- 9.** Commenter le cas $n = n_0$, puis le cas $a \rightarrow 0$. De même, commenter les valeurs de r pour les ϕ particuliers de la question 1.
- 10. (Python)** Tracer la fonction R en fonction de la longueur d'onde λ_0 du rayonnement incident. On choisira différentes épaisseurs de lame, telles que celles-ci sont maximales réfléchissantes pour $\lambda_0 = 540$ nm.

Application au traitement antireflets

- 11.** On cherche à minimiser la réflexion de l'onde lumineuse à une interface air/diélectrique (pour des verres de lunettes, des lentilles de laboratoire, etc.), en ajoutant une couche d'indice n . Quelle est la valeur de l'indice minimisant la réflexion si $n_0 = 1,5$ pour du verre standard BK7 ([variation de l'indice du BK7](#))?
- 12.** Malheureusement, on ne connaît pas de matériau de cet indice. On utilise en pratique du fluorure de magnésium d'indice $n = 1,38$. Comparer les coefficients de réflexion avec et sans traitement antireflets.
- 13.** Estimer la transmission à travers le système optique de la Fig. 2 si les optiques sont avec ou sans traitement antireflets.
- 14.** À l'aide de la question 1., justifier que les reflets résiduels des verres de lunette ayant subi un traitement antireflets ont une couleur violette (ou pas !)



FIGURE 2 – Exemple d'un montage d'optique dédié à l'étude des atomes froids. Image tirée du compte Twitter de l'équipe MBQD à Cambridge.

2 Miroir de Bragg : un exemple de cristal photonique unidimensionnel

Dans la partie précédente, nous avons réussi à minimiser un coefficient de réflexion grâce au dépôt d'une couche diélectrique. Cette minimisation n'est valable que pour une longueur d'onde spécifique. De plus on a vu que la présence d'une couche ne modifiait pas la réflexion maximale sur le système.

En utilisant non pas une mais plusieurs couches, il est possible de changer la réflexion maximale du système. Dans cette partie, on cherche à construire un système qui réfléchit parfaitement une **bande** de longueurs d'onde.

15. On accole deux lames diélectriques d'indices n_1 et n_2 et d'épaisseurs a_1 et a_2 . Exprimer sous forme matricielle les amplitudes en $a_1 + a_2$ dans le milieu d'indice n_1 en fonction des amplitudes en $z = 0$ dans le même milieu. La matrice obtenue s'appelle matrice de transfert T_c du système. On posera $\tau = \sqrt{\tau_{12}\tau_{21}}$, $\rho = \rho_{21}$, $\phi_1 = n_1 k a_1$ et $\phi_2 = n_2 k a_2$.
16. Calculer le déterminant de T_c . Calculer de plus explicitement ses éléments diagonaux. En déduire l'équation vérifiée par les valeurs propres de T_c .¹ On notera

$$A = \frac{1}{\tau^2} [\cos(\phi_1 + \phi_2) - \rho^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \phi_1 \sin \phi_2. \quad (6)$$

et on ne cherchera pas à montrer la deuxième égalité de l'équation précédente.

17. On note S_N la matrice de transfert après N bicouches. Exprimer S_N en fonction de T_c puis en fonction de la matrice D diagonale telle que $T_c = P^{-1}DP$. Montrer que le coefficient de réflexion en intensité après N bicouches s'écrit

$$R_N = \left| \frac{S_{N,21}}{S_{N,22}} \right|^2 = \left| \frac{(S_N^{-1})_{21}}{(S_N^{-1})_{11}} \right|^2. \quad (7)$$

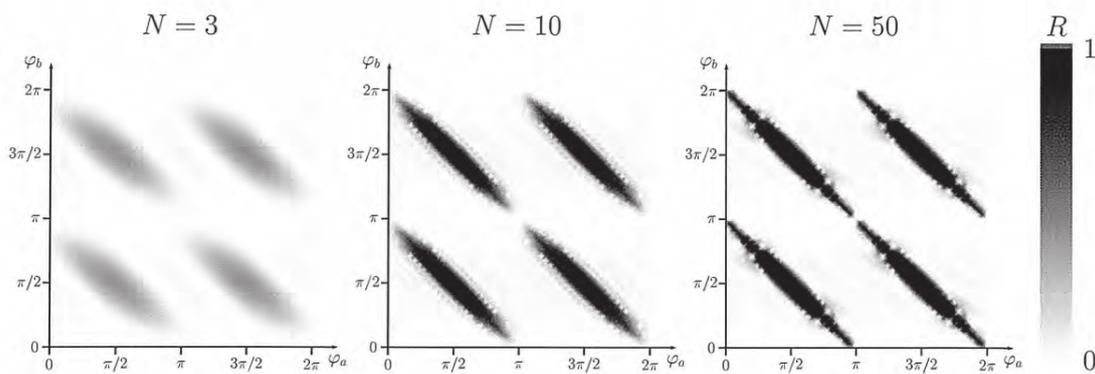


FIGURE 3 – Coefficient de réflexion pour un multi-bicouches

18. La figure 3 représente la fonction de réflexion $R_N(\phi_1, \phi_2)$ pour différents N . Donner les valeurs de ϕ_1 et ϕ_2 pour lesquelles R_N est maximale. On les notera $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$ respectivement.
19. Pour les valeurs $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$, les matrices D^{-1} et P s'expriment simplement :

$$D^{-1} = -\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & 0 \\ 0 & (1-\rho)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

et en déduire que

$$R_N = \left| \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \right|^2 \quad (9)$$

20. On réalise un empilement de $N = 40$ bicouches de GaAs/AlAs, d'indices $n_{\text{GaAs}} = 3,3$ et $n_{\text{AlAs}} = 2,9$. Calculer la réflectivité du miroir pour $\lambda = 1 \mu\text{m}$. Quelle est l'épaisseur minimale de l'empilement ?
21. La symétrie de la figure 3 montre qu'on peut calculer la bande passante du miroir sur la ligne $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Dans la zone de réflexion, $|A| \geq 1$. En déduire la bande passante $\Delta\lambda$ du miroir en fonction de n_1 , n_2 et $\lambda_0 = 4n_1a_1 = 4n_2a_2$ la longueur d'onde adaptée.

1. On rappelle que le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 s'écrit $P_M(X) = X^2 - (\text{Tr } M)X + \det M$.

- 22. (Python)** Tracer la courbe de transmission du champ électrique en fonction de la longueur d'onde pour $N = 2, 5, 10$ et 15 .
- 23.** Dans quel autre domaine de la physique rencontre-t-on des bandes interdites ?

Références

- [1] Énoncé de TD du cours *Optique et Lasers* donné à l'ENS Cachan en 2009.
- [2] Sujet de l'épreuve C 2014 du concours de l'agrégation de physique.