

## TD 3 : Virgo, un interféromètre géant

Les *ondes gravitationnelles* sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps, émises par des masses en mouvement, et qui se propagent à la vitesse de la lumière. Une onde gravitationnelle crée à son passage sur Terre une modulation de l'indice optique  $n$ , **de signe opposé dans deux directions perpendiculaires**, de fréquence comprise entre 10 Hz et 10 kHz pour les événements que l'on espère détecter. La variation d'indice estimée dans un bras est notée  $\pm \frac{h_0}{2}$ , avec  $h_0 \simeq 10^{-22} - 10^{-23}$ .

On va voir comment l'interférométrie optique peut être utilisée pour les détecter. On envisagera successivement trois interféromètres : une cavité Fabry-Perot, un interféromètre de Michelson et un interféromètre avancé qui combine les avantages des deux précédents.

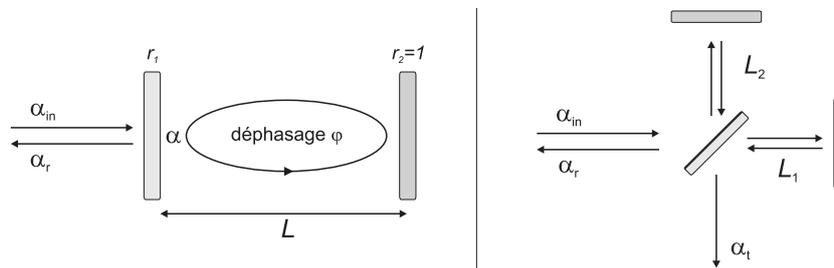


FIGURE 1 – Deux géométries d'interféromètre envisagées pour détecter une onde gravitationnelle : la cavité Fabry-Perot (à gauche) et l'interféromètre de Michelson (à droite).

### 1 Cavité Fabry-Perot

On envisage tout d'abord de détecter une onde gravitationnelle en mesurant le déphasage induit grâce à une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie (le miroir de droite ayant une réflectivité  $r_2 = 1$ , cf. Fig. 1), celle-ci étant parcourue par un faisceau laser de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ . On note  $n$  l'indice à l'intérieur de l'interféromètre.

Le lien entre champs incident et réfléchi est alors :

$$\alpha_r = \frac{r_1 - e^{i\varphi}}{1 - r_1 e^{i\varphi}} \alpha_{in}. \quad (1)$$

1. Rappeler l'expression de  $\varphi$ . Justifier que proche d'une résonance,  $\varphi = 2\pi p + \delta\varphi$  avec  $\delta\varphi \ll 1$ . Montrer alors que pour une cavité de grande finesse ( $\mathcal{F} = \frac{\pi r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{\pi r_1}{1 - r_1} \gg 1$ ), le déphasage  $\delta\Phi$  du champ réfléchi sortant de la cavité vaut :

$$\delta\Phi = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi. \quad (2)$$

Commenter l'intérêt de la cavité.

#### Correction

$\varphi$  est la phase accumulée lors d'un aller-retour par le faisceau, donc  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2nL$ .

À résonance, il y a interférences constructives entre les ondes ayant fait un nombre différent d'aller-retours dans la cavité, on a donc un déphasage  $\varphi = 2\pi p$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ .

On fait un développement limité au premier ordre en  $\delta\varphi$  (grande finesse impliquant  $r_1 \approx 1$ ) :

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_{in}} = \frac{r_1 - e^{i\delta\varphi}}{1 - r_1 e^{i\delta\varphi}} = \frac{r_1 - (1 + i\delta\varphi)}{1 - r_1(1 + i\delta\varphi)} = \frac{r_1 - 1}{1 - r_1} \frac{1 + i\frac{\delta\varphi}{1 - r_1}}{1 - i\frac{r_1}{1 - r_1}\delta\varphi} = - \left( 1 + i\frac{\delta\varphi}{1 - r_1} \right) \left( 1 + i\frac{r_1}{1 - r_1}\delta\varphi \right)$$

soit

$$\alpha_r = - \left( 1 + i \frac{2\delta\varphi}{1-r_1} \right) \alpha_{in} = - e^{i\Phi} \alpha_{in} \quad \text{où} \quad \boxed{\delta\Phi = \frac{2\delta\varphi}{1-r_1} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi}$$

Au passage, le DL demande de vérifier également que  $\frac{r_1}{1-r_1} \delta\varphi = \frac{\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi \ll 1$ . Donc à posteriori, avoir  $\delta\Phi \ll 1$ .

Dans la suite, la cavité est supposée à résonance.

2. Donner l'expression du déphasage  $\delta\Phi_{o.g.}$  induit par le passage d'une onde gravitationnelle.

### Correction

On passe d'un indice de 1 à  $1 + \frac{h_0}{2}$  dans un des bras, et lors d'un aller-retour l'onde subit un déphasage  $\delta\varphi_{o.g.} = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2\delta n L = \frac{2\pi}{\lambda_0} h_0 L$ . Dans la cavité, ce déphasage devient

$$\boxed{\delta\Phi_{o.g.} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi_{o.g.} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{2\pi h_0 L}{\lambda_0}}$$

3. **Bruit de fréquence.** La fréquence d'un laser (même asservi), n'est jamais parfaitement fixée. Écrire le déphasage induit par une variation  $\delta\nu$  de la fréquence du laser autour de  $\nu_0 = c/\lambda_0$ . En déduire la valeur minimale  $h_\nu$  de l'amplitude de l'onde gravitationnelle qu'une telle méthode de détection permettrait de détecter (si elle est limitée par le bruit de fréquence du laser). Faire l'application numérique avec  $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$  et  $\Delta\nu \simeq 100 \text{ Hz}$ .

### Correction

Si la fréquence varie de  $\delta\nu$ , on a une variation  $\delta\varphi_\nu = \frac{2\pi\delta\nu}{c} 2nL = \frac{4\pi nL}{c} \delta\nu$ . Dans la cavité, on obtient un déphasage :

$$\boxed{\delta\Phi_\nu = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi_\nu = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{4\pi L}{c} \delta\nu}$$

Donc la cavité démultiplie le signal recherché, mais **aussi** les éventuels bruits de fréquence du laser. Pour connaître la limitation en détection, on peut chercher  $h_\nu$  tel que les deux déphasages sont égaux, à savoir  $\delta\varphi_{o.g.} = \delta\varphi_\nu$  (la cavité n'intervient pas), soit

$$h_\nu = \frac{2\lambda_0}{c} \delta\nu = \frac{2 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} 10^2 = \boxed{0,6 \times 10^{-12}}$$

## 2 Interféromètre de Michelson

On envisage maintenant un interféromètre de Michelson (cf. Fig. 1) avec  $L_1 \simeq L_2$ .

4. Écrire l'expression des déphasages  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  accumulés dans les deux bras de l'interféromètre en présence d'une onde gravitationnelle et d'un bruit de fréquence. Quel est l'intérêt d'une telle géométrie ?

### Correction

Le déphasage dans le bras  $i$  s'écrit

$$\varphi_i = 2 \frac{2\pi}{\lambda} L_i \pm 2 \frac{2\pi}{\lambda} L_i \frac{h_0}{2} + \frac{4\pi L_i}{c} \delta\nu$$

le signe  $\pm$  provenant du caractère quadripolaire de l'excitation gravitationnelle.

L'interféromètre de Michelson va détecter une différence de phase, donc reliée à  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Si les bras ont essentiellement la même longueur, le bruit de fréquence va être négligeable devant le signal recherché. En fait ce n'est pas du tout évident, numériquement :

$$\frac{4\pi}{c} \delta\nu \underbrace{(L_1 - L_2)}_{\sim \lambda_0} \simeq \frac{4 \times 3}{3 \times 10^8} \times 100 \times 20 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-8}$$

et

$$2 \frac{2\pi}{\lambda} (L_1 + L_2) \frac{h_0}{2} = \frac{4\pi L h_0}{\lambda_0} \simeq \frac{4 \times 3 \times 3 \times 10^3 \times 10^{-22}}{10^{-6}} = 4 \times 10^{-12}$$

Le terme de bruit est toujours dominant par rapport au terme de l'onde gravitationnelle.

5. Un asservissement en fréquence permet de contrôler la fréquence du laser extrêmement finement, et de descendre à  $\delta\nu = 10^{-6}$  Hz. Est-ce suffisant dans le contexte ?

**Correction**

Oui ! Dans ce cas on descend de 7 ordres de grandeurs, et on passe en-dessous de la valeur de la phase du signal recherché !

6. Calculer l'intensité à la sortie de l'interféromètre. On rappelle que la réflexion sur la séparatrice entraîne un déphasage supplémentaire de  $\pi$  sur l'un des deux chemins.

**Correction**

Pour les deux chemins, les amplitudes des champs s'écrivent :

$$\alpha_{in} \rightarrow \frac{\alpha_{in}}{2} e^{i\varphi_1} \quad \text{et} \quad \alpha_{in} \rightarrow -\frac{\alpha_{in}}{2} e^{i\varphi_2}$$

D'où

$$\alpha_t = \alpha_{in} \frac{e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}}{2} = \alpha_{in} e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} i \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

Finalement

$$I_t = I_0 \sin^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{2\pi}{c} (L_1 - L_2)(\nu + \delta\nu) + \frac{2\pi}{\lambda} h_0 \frac{L_1 + L_2}{2}$$

En négligeant le bruit de fréquences, et en prenant  $L = L_1 \approx L_2$  dans le dernier terme, on a :

$$I_t = I_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 - L_2) + \frac{2\pi}{\lambda} h_0 L\right)$$

7. En l'absence d'onde gravitationnelle, on se place à un point de fonctionnement qui maximise les variations de l'intensité détectée. Combien vaut  $L_1 - L_2$  ?

**Correction**

On cherche à maximiser la variation d'intensité, on se place donc sur une pente de la sinusoïde, à savoir en  $\frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$ . Ainsi,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  et

$$L_1 - L_2 = \frac{\lambda_0}{8} \left[\frac{\lambda_0}{4}\right]$$

8. Lorsqu'une onde gravitationnelle passe, quelle est la variation d'intensité lumineuse  $\delta I_{og}$  produite ? En déduire la variation de photons détectés  $\delta N_{og}$  en fonction de  $h$ ,  $\lambda_0$ ,  $L = L_1 \approx L_2$  et  $\bar{N}$  le nombre moyen de photons incidents sans perturbation.

**Correction**

On se place dans le cas où  $\frac{2\pi}{\lambda} (L_1 - L_2) = \frac{\pi}{4}$ . Alors d'après les questions précédentes :

$$I_t = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{\lambda} h_0 L\right) = \frac{I_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{\lambda} h_0 L\right)\right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda} h_0 L\right)\right)$$

Avec un DL à l'ordre 1, on trouve la variation d'intensité  $\delta I_t$  par rapport à une situation sans onde gravitationnelle

$(I_t = I_0/2)$  :

$$\delta I_t = \frac{I_0}{2} \frac{4\pi}{\lambda} h_0 L$$

L'intensité lumineuse est proportionnelle au nombre de photons arrivant par unité de temps :  $N = KI_t$ , donc

$$\delta N_{o.g.} = \bar{N} \frac{4\pi}{\lambda} h_0 L$$

où  $\bar{N}$  est le nombre moyen de photons pour une intensité  $I_0/2$ .

9. **Bruit de grenaille.** En supposant une distribution poissonnienne de l'arrivée des photons sur le détecteur, à quelle fluctuation typique  $\delta N$  peut-on s'attendre pour un nombre moyen de photons  $\bar{N}$  ?

**Correction**

Pour une distribution poissonnienne, la variance est égale à la moyenne  $(\Delta N)^2 = \bar{N}$ , d'où une fluctuation autour de la moyenne  $\delta N = \sqrt{\bar{N}}$ .

10. Montrer que le plus petit signal gravitationnel détectable est alors :

$$h_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\pi L \sqrt{\bar{N}}} \tag{3}$$

Quelle longueur des bras est alors nécessaire pour détecter un signal  $h_0 \simeq 10^{-22}$  ? On prendra pour la puissance du laser incident  $P_{\text{in}} = 100 \text{ W}$  et un temps d'intégration  $\tau = 1 \text{ s}$ .

**Correction**

La situation optimale étant obtenue pour  $\delta N = \delta N_{o.g.}$ , on obtient

$$h_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\pi L \sqrt{\bar{N}}}$$

Pour un nombre moyen de photons  $\bar{N} = \frac{P\tau}{h\nu} = \frac{P\tau\lambda}{hc} = \frac{100 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{18} 10^{22} = \frac{1}{2} 10^{21}$ , on obtient

$$L_{\min} = \frac{10^{-6}}{4 \times \pi \times 10^{-22} \sqrt{0,5 \times 10^{21}}} = 50 \text{ km !}$$

### 3 Interféromètre avancé

Pour augmenter la longueur effective des bras, on insère des cavités Fabry-Perot résonnantes (semblables à celle discutée dans la première partie) dans chacun des deux bras de longueur  $L = L_1 \approx L_2$ .

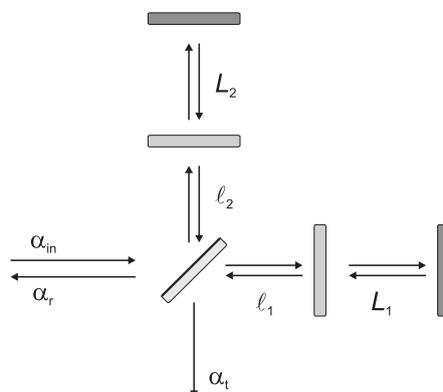


FIGURE 2 – Interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot dans chacun des bras.

11. Quel est l'effet de l'ajout d'une cavité Fabry-Perot de finesse  $\mathcal{F}$  sur la longueur effective du bras ?

### Correction

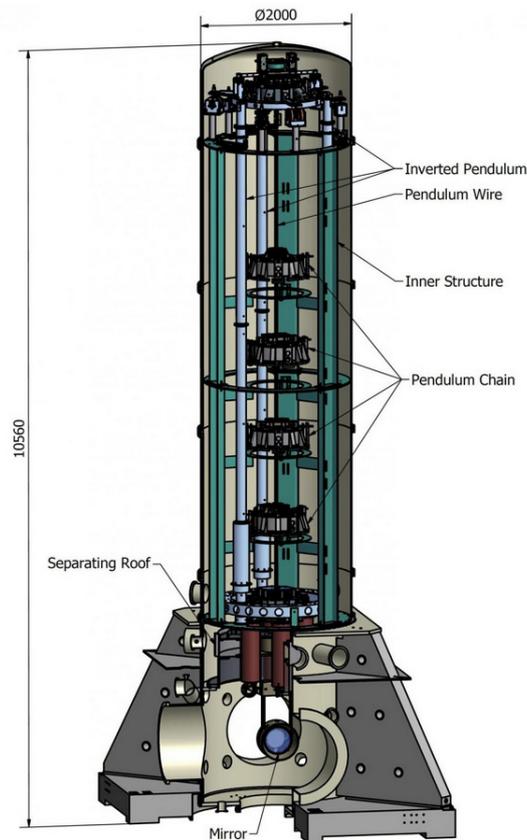
L'effet des cavités est d'augmenter la longueur effective par un facteur  $2\mathcal{F}/\pi \simeq \mathcal{F}$ . La longueur nécessaire réelle est donc divisée par  $\mathcal{F}$ .

12. Pourquoi a-t-on quand même intérêt à prendre des cavités les plus longues possible ?

### Correction

A priori, on peut s'affranchir du bruit de fréquence en prenant  $L_1 \simeq L_2$ , et la limite due au comptage des photons ne dépend que de la longueur effective  $\mathcal{F}L$ . Mais, si les miroirs vibrent (sous l'effet des vibrations du sol ou du bruit thermique), l'effet sera à comparer à celui de l'OG ( $\simeq hL$ ) : on a donc intérêt à prendre  $L$  la plus grande possible pour minimiser l'influence de ces fluctuations de longueur sur la sensibilité de l'interféromètre.

Si la sensibilité est limitée par le bruit thermique (comme c'est le cas pour la première génération d'interféromètres, pour certaines fréquences), il faut utiliser les cavités les plus longues possibles.



13. Les miroirs utilisés ont un diamètre de 35 cm, et les bras de l'interféromètre font approximativement  $L = 3$  km. Le faisceau laser se propageant étant gaussien, son rayon transverse est donné par :

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{x\lambda_0}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (4)$$

Sur quelle longueur  $L_R$  le faisceau est-il approximativement cylindrique ?

Dans Advance Virgo, on fait en sorte que le minimum de la taille transverse soit au milieu des bras. Estimer la taille transverse du faisceau sur les miroirs si on choisit  $w_0 = 2$  cm. Pour Virgo, la taille minimale  $w_0$  était atteinte sur un des miroirs des bras de l'interféromètre. Motiver la modification.

### Correction

Le faisceau passe de cylindrique à conique lorsque les deux termes sous la racine sont du même ordre de grandeur, soit  $L_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0}$ . Cette longueur s'appelle la longueur de Rayleigh.

Pour ne pas perdre en puissance et utiliser les miroirs dans les conditions nominales, il ne faut pas que le faisceau recouvre toute la surface, ou pire déborde. En pratique on prend un facteur 3 entre la taille du faisceau et le rayon du miroir, soit  $w_{\max} \approx 6$  cm. Ce qui limite la taille des bras.

Dans notre cas,  $x = 0$  est au milieu des bras, on a donc aux extrémités :

$$w = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{L\lambda_0}{2\pi w_0^2} \right)^2} = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{3 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6}}{2\pi \times (2 \times 10^{-2})^2} \right)^2} = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{30}{8\pi} \right)^2} = 4,9 \text{ cm}$$

L'endroit où le laser est le plus focalisé implique une puissance surfacique maximale sur les miroirs, et donc un bruit thermique important. Le bruit thermique étant devenu critique pour Advanced Virgo, le choix a été fait de déplacer la largeur minimale au centre des bras de l'interféromètre.

14. Dans le cas de l'interféromètre Virgo  $\mathcal{F} = 50$ . Calculer la sensibilité que l'on peut atteindre ainsi. Pourquoi n'a-t-on pas choisi une finesse plus élevée ?

### Correction

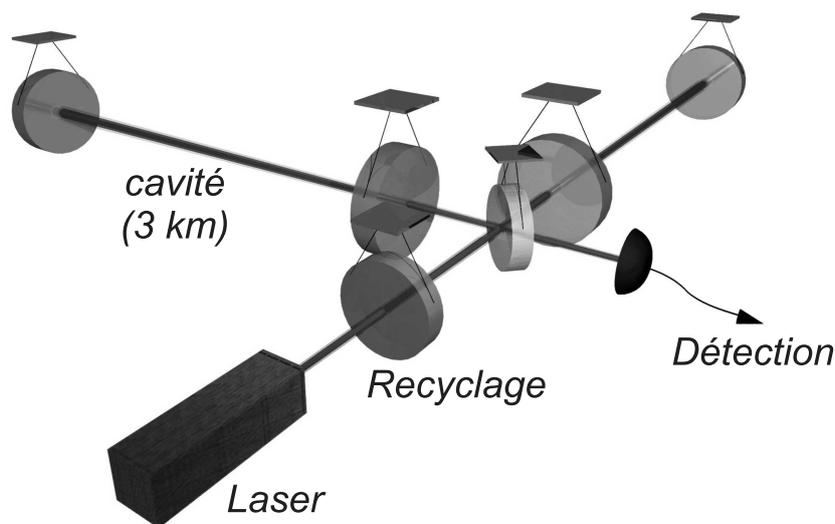
La formule (3) corrigée par le facteur  $2\mathcal{F}/\pi$  donne une sensibilité :

$$h_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\mathcal{F}L\sqrt{2N}} = \frac{10^{-6}}{4 \times 50 \times 3 \times 10^3 \times \sqrt{10^{21}}} = \frac{10^{-11}}{6 \times \sqrt{10} \times 10^{10}} \simeq 10^{-22}.$$

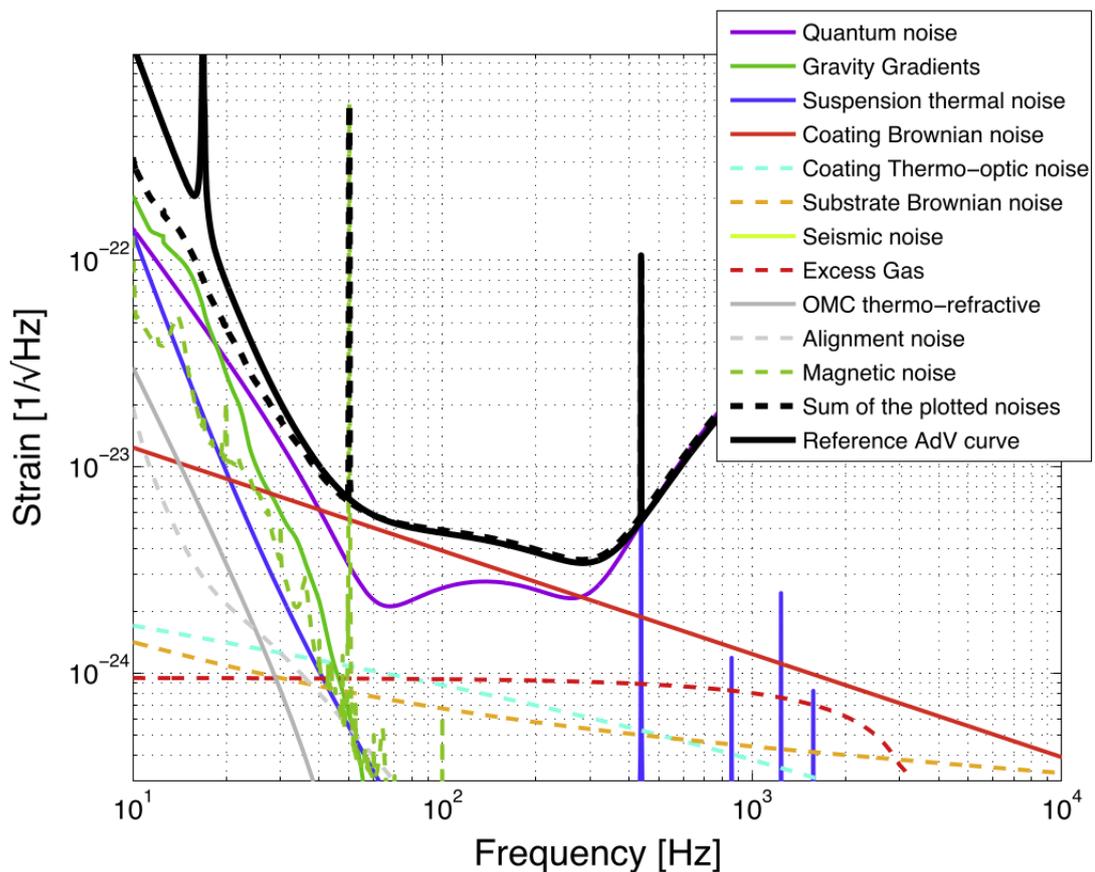
L'effet du bruit de position des miroirs est amplifié (de la même façon que celui d'une OG) par l'usage de cavités résonnantes.

Sur l'Advanced Virgo, la finesse des cavités a été augmentée à 440.

Une autre limitation importante de trop grands bras est la diminution de la bande passante. En effet, des bras plus longs vont induire un temps de parcours plus long pour la lumière. Dans le cas de Virgo, le temps de parcours est 1 ms, ce qui limite la bande passante à 1 kHz. Comme on s'attend à ce que la majorité des signaux soient entre 50 Hz et qqs kHz, augmenter la longueur des bras (et la finesse des cavités) reviendrait à diminuer la gamme de fréquences mesurables.



### Correction



- Quantum noise à basse fréquence : bruit d'amplitude du laser (augmente si l'intensité du laser augmente)
- Quantum noise à haute fréquence : bruit de phase du laser (bruit de grenaille, diminue si l'intensité augmente)
- Gravity gradients : les effets infimes de gravité sont détectés par Virgo et deviennent limitant dans la mesure ! D'où un interféromètre sous-terrain au Japon par exemple, pour s'isoler au maximum des variations de gradients de gravité.
- On remarque bien le 50 Hz. Les autres pics sont les fréquences de résonances des suspensions des miroirs (la fréquence entendue lors de la détection de la première OG !)

### À retenir

- ★ Virgo (comme ses cousins LIGO) est un interféromètre mixte entre Michelson et Fabry-Pérot. Les interféromètres LIGO ont démontré l'existence des ondes gravitationnelles en 2015.
- ★ Pour détecter des signaux relatifs de l'ordre de  $10^{-22}$  sur la variation des longueurs des bras, on utilise un interféromètre avec des bras de 3 km.
- ★ L'ajout de miroirs internes permet un effet Fabry-Pérot et démultiplie la longueur effective de la cavité (finesse actuelle 443).
- ★ Tous les bruits doivent être précisément éliminés (bruit de fréquence, de grenaille, de déplacements des miroirs, etc.)