

TD 3 : Virgo, un interféromètre géant

Les *ondes gravitationnelles* sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps, émises par des masses en mouvement, et qui se propagent à la vitesse de la lumière. Une onde gravitationnelle crée à son passage sur Terre une modulation de l'indice optique n , **de signe opposé dans deux directions perpendiculaires**, de fréquence comprise entre 10 Hz et 10 kHz pour les événements que l'on espère détecter. La variation d'indice estimée dans un bras est notée $\pm \frac{h_0}{2}$, avec $h_0 \simeq 10^{-22} - 10^{-23}$.

On va voir comment l'interférométrie optique peut être utilisée pour les détecter. On envisagera successivement trois interféromètres : une cavité Fabry-Perot, un interféromètre de Michelson et un interféromètre avancé qui combine les avantages des deux précédents.

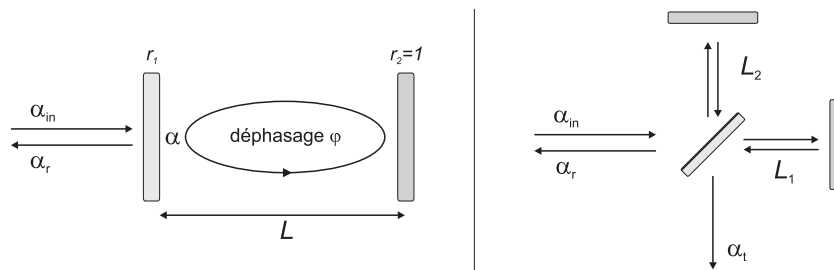


FIGURE 1 – Deux géométries d'interféromètre envisagées pour détecter une onde gravitationnelle : la cavité Fabry-Perot (à gauche) et l'interféromètre de Michelson (à droite).

1 Cavité Fabry-Perot

On envisage tout d'abord de détecter une onde gravitationnelle en mesurant le déphasage induit grâce à une cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie (le miroir de droite ayant une réflectivité $r_2 = 1$, cf. Fig. 1), celle-ci étant parcourue par un faisceau laser de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note n l'indice à l'intérieur de l'interféromètre.

Le lien entre champs incident et réfléchi est alors :

$$\alpha_r = \frac{r_1 - e^{i\varphi}}{1 - r_1 e^{i\varphi}} \alpha_{in}. \quad (1)$$

- Rappeler l'expression de φ . Justifier que proche d'une résonance, $\varphi = 2\pi p + \delta\varphi$ avec $\delta\varphi \ll 1$. Montrer alors que pour une cavité de grande finesse ($\mathcal{F} = \frac{\pi r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{\pi r_1}{1 - r_1} \gg 1$), le déphasage $\delta\Phi$ du champ réfléchi sortant de la cavité vaut :

$$\delta\Phi = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta\varphi. \quad (2)$$

Commenter l'intérêt de la cavité.

Dans la suite, la cavité est supposée à résonance.

- Donner l'expression du déphasage $\delta\Phi_{o.g.}$ induit par le passage d'une onde gravitationnelle.
- Bruit de fréquence.** La fréquence d'un laser (même asservi), n'est jamais parfaitement fixée. Écrire le déphasage induit par une variation $\delta\nu$ de la fréquence du laser autour de $\nu_0 = c/\lambda_0$. En déduire la valeur minimale h_ν de l'amplitude de l'onde gravitationnelle qu'une telle méthode de détection permettrait de détecter (si elle est limitée par le bruit de fréquence du laser). Faire l'application numérique avec $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ et $\Delta\nu \simeq 100 \text{ Hz}$.

2 Interféromètre de Michelson

On envisage maintenant un interféromètre de Michelson (cf. Fig. 1) avec $L_1 \simeq L_2$.

4. Écrire l'expression des déphasages φ_1 et φ_2 accumulés dans les deux bras de l'interféromètre en présence d'une onde gravitationnelle et d'un bruit de fréquence. Quel est l'intérêt d'une telle géométrie ?
5. Un asservissement en fréquence permet de contrôler la fréquence du laser extrêmement finement, et de descendre à $\delta\nu = 10^{-6}$ Hz. Est-ce suffisant dans le contexte ?
6. Calculer l'intensité à la sortie de l'interféromètre. On rappelle que la réflexion sur la séparatrice entraîne un déphasage supplémentaire de π sur l'un des deux chemins.
7. En l'absence d'onde gravitationnelle, on se place à un point de fonctionnement qui maximise les variations de l'intensité détectée. Combien vaut $L_1 - L_2$?
8. Lorsqu'une onde gravitationnelle passe, quelle est la variation d'intensité lumineuse δI_{og} produite ? En déduire la variation de photons détectés δN_{og} en fonction de h , λ_0 , $L = L_1 \approx L_2$ et \bar{N} le nombre moyen de photons incidents sans perturbation.
9. **Bruit de grenaille.** En supposant une distribution poissonnienne de l'arrivée des photons sur le détecteur, à quelle fluctuation typique δN peut-on s'attendre pour un nombre moyen de photons \bar{N} ?
10. Montrer que le plus petit signal gravitationnel détectable est alors :

$$h_{\text{min}} = \frac{\lambda_0}{4\pi L \sqrt{\bar{N}}}. \quad (3)$$

Quelle longueur des bras est alors nécessaire pour détecter un signal $h_0 \simeq 10^{-22}$? On prendra pour la puissance du laser incident $P_{\text{in}} = 100$ W et un temps d'intégration $\tau = 1$ s.

3 Interféromètre avancé

Pour augmenter la longueur effective des bras, on insère des cavités Fabry-Perot résonnantes (semblables à celle discutée dans la première partie) dans chacun des deux bras de longueur $L = L_1 \approx L_2$.

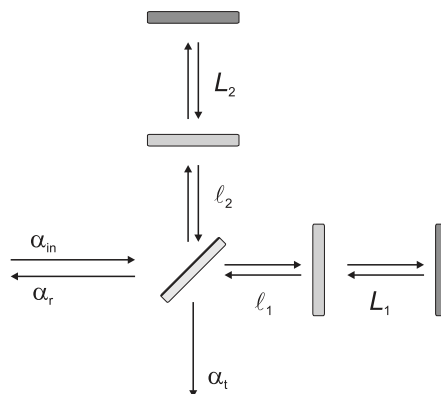


FIGURE 2 – Interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot dans chacun des bras.

11. Quel est l'effet de l'ajout d'une cavité Fabry-Perot de finesse \mathcal{F} sur la longueur effective du bras ?
12. Pourquoi a-t-on quand même intérêt à prendre des cavités les plus longues possible ?
13. Les miroirs utilisés ont un diamètre de 35 cm, et les bras de l'interféromètre font approximativement $L = 3$ km. Le faisceau laser se propageant étant gaussien, son rayon transverse est donné par :

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x \lambda_0}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (4)$$

Sur quelle longueur L_R le faisceau est-il approximativement cylindrique ?

Dans Advance Virgo, on fait en sorte que le minimum de la taille transverse soit au milieu des bras. Estimer la taille transverse du faisceau sur les miroirs si on choisit $w_0 = 2$ cm. Pour Virgo, la taille minimale w_0 était atteinte sur un des miroirs des bras de l'interféromètre. Motiver la modification.

14. Dans le cas de l'interféromètre Virgo $\mathcal{F} = 50$. Calculer la sensibilité que l'on peut atteindre ainsi. Pourquoi n'a-t-on pas choisi une finesse plus élevée ?