

TD 2: Propriétés des cavités Fabry-Perot

On s'intéresse à une cavité Fabry-Perot, constituée de deux miroirs parallèles, séparés par une distance L . On va en étudier les propriétés générales, ainsi que quelques applications.

1 Calcul des champs réfléchis et transmis. Finesse d'une cavité

Soient r_i et t_i ($i = 1$ ou 2) les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des deux miroirs plans. On négligera les pertes des miroirs, si bien que $R_i + T_i = 1$ avec $R_i = |r_i|^2$.^{1 2}

On notera α_{in} l'amplitude complexe du champ incident, α_r celle du champ réfléchi et α_t celle du champ transmis. Le faisceau incident est une onde plane de fréquence ν dont le vecteur d'onde est incliné par rapport à l'axe optique d'un angle θ . Le milieu entre les deux miroirs est homogène et isotrope d'indice optique n .

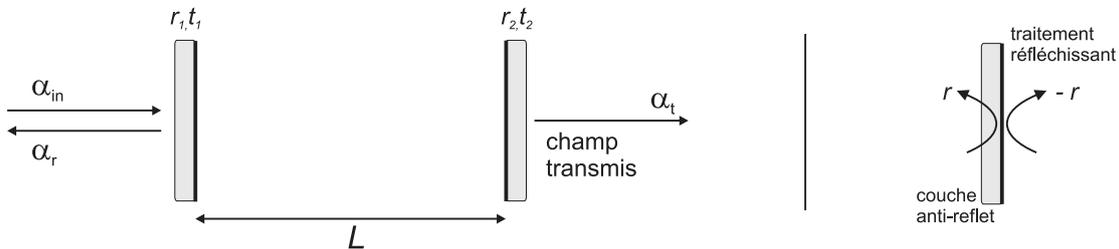


FIGURE 1 – Gauche : Notations pour le calcul des champs. Droite : Valeurs des coefficients de réflexion d'un miroir pour deux ondes incidentes de deux côtés différents.

1. Écrire les champs transmis et réfléchis comme le résultat de l'interférence entre différentes ondes. On notera φ le déphasage du champ lors d'un aller-retour dans la cavité :

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}. \quad \text{avec} \quad \delta = 2nL \cos \theta \quad (1)$$

avec $\theta = 0$ pour une incidence normale.

Correction

Pour calculer l'intensité transmise α_t , on part du champ incident α_{in} transmis par le miroir 1. Après propagation (déphasage $e^{i\varphi/2}$), il va être soit transmis (t_2) soit réfléchi ($-r_2$) puis se re-propager, et être transmis par le miroir 1 (et donc ne pas contribuer à α_t) ou être réfléchi ($-r_1$) et on est revenu à la situation précédente. Ainsi :

$$\alpha_t = \alpha_{in} t_1 e^{i\varphi/2} \left(t_2 + (-r_2) e^{i\varphi/2} (-r_1) e^{i\varphi/2} t_2 + \dots \right) = \alpha_{in} t_1 t_2 e^{i\varphi/2} \sum_{k \geq 0} (r_1 r_2 e^{i\varphi})^k$$

Le calcul du champ réfléchi est similaire : une première onde va être directement réfléchi. Toutes les autres sont transmises deux fois par le miroir 1, et font un premier passage dans la cavité, puis k passages :

$$\alpha_r = \alpha_{in} \left(r_1 + t_1 e^{i\varphi/2} (-r_2) e^{i\varphi/2} (t_1) + \dots \right) = \alpha_{in} \left(r_1 - t_1^2 r_2 e^{i\varphi} \sum_{k \geq 0} (r_1 r_2 e^{i\varphi})^k \right)$$

2. Montrer que les champs transmis et réfléchis peut s'écrire respectivement :

$$\alpha_t = \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}} \alpha_{in} \quad \text{et} \quad \alpha_r = \frac{r_1 - r_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}} \alpha_{in}. \quad (2)$$

1. Cette approximation est discutable pour des miroirs métalliques, mais très bonne pour des miroirs diélectriques.

2. Attention, la relation $R = |r|^2$ est toujours vraie, mais $T = |t|^2$ n'est pas vraie dans le cas général d'un problème de transmission ! En particulier si le milieu d'arrivée a un indice différent, ou si l'incidence est oblique.

Correction

Comme $|r_1 r_2| < 1$, pas de problème de convergence, on a donc :

$$\alpha_t = \alpha_{in} \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}}$$

et

$$\alpha_r = \alpha_{in} \left(r_1 - t_1^2 r_2 e^{i\varphi} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}} \right) = \alpha_{in} \frac{r_1 - r_1^2 r_2 e^{i\varphi} - t_1^2 r_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}} = \alpha_{in} \frac{r_1 - r_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}}$$

3. En déduire que l'intensité transmise I_t se met sous la forme :

$$I_t = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2(\varphi/2)}, \quad (3)$$

où on explicitera les coefficients I_{\max} et m . Estimer m pour des coefficients de réflexion $R_1 = R_2 = 95\%$. En déduire une approximation utile pour la suite de cette étude.

Correction

On déduit du résultat précédent :

$$I_t = |\alpha_t|^2 = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{|1 - r_1 r_2 e^{i\varphi}|^2} = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2 \cos \varphi)^2 + r_1^2 r_2^2 \sin^2 \varphi} = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}$$

et en faisant apparaître $(1 - r_1 r_2)^2$:

$$I_t = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2(\varphi/2)} = I_{\max} \frac{1}{1 + m \sin^2(\varphi/2)}$$

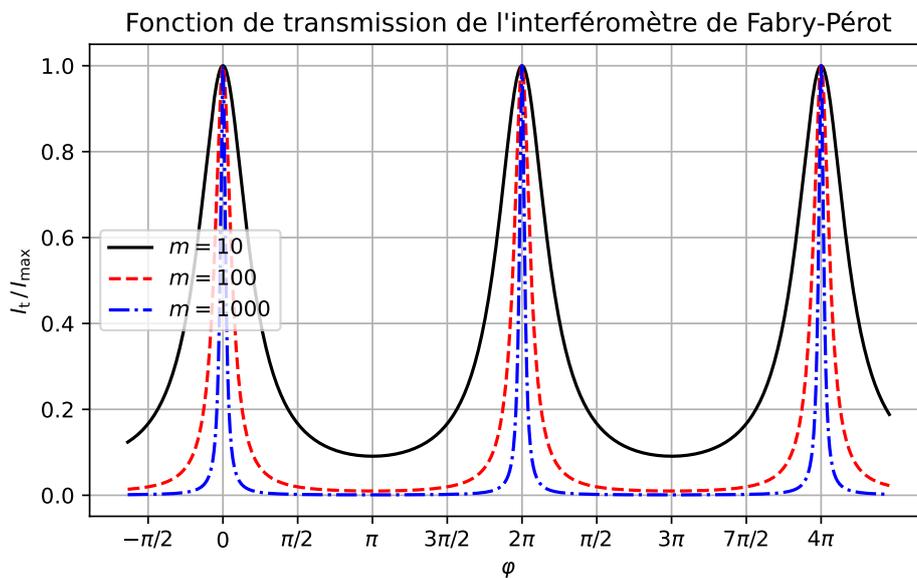
où

$$I_{\max} = I_0 \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad \text{et} \quad m = \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

Pour $r_1 r_2 = 0,95$, on trouve $m = 1520$. On pourra supposer sans risque $m \gg 1$ dans la suite.

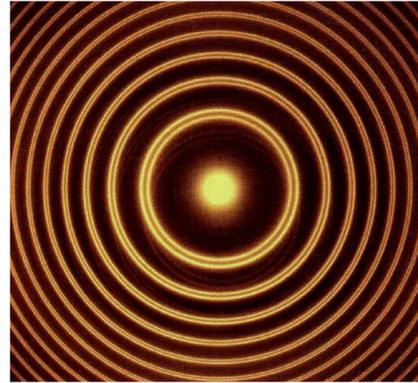
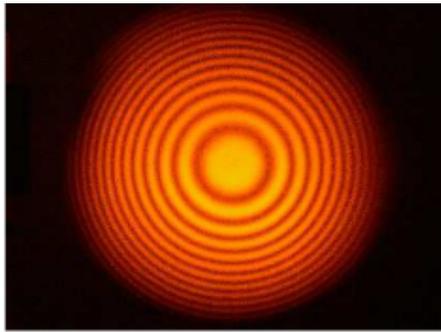
4. Tracer la fonction $I_t(\varphi)$ (sa forme est appelée *fonction d'Airy*). Quelle est la figure observée en sortie d'interféromètre ? Préciser le montage optique réalisé.

Correction



La figure I_t est très piquée pour certaines valeurs de φ . La figure d'interférence montrera des franges brillantes

pour $\varphi = 0[2\pi]$, ce qui donne une condition sur les angles d'incidence i . Les franges sont symétriques par révolution autour de l'axe optique, d'où une figure en anneaux.



À gauche l'interférogramme d'une source sodium par un interféromètre de Michelson, à droite celui par un interféromètre de Fabry-Perot. On comprend l'intérêt d'utiliser des interférences à N ondes dans cette situation.

Afin d'obtenir cette figure, il faut se placer en conditions de Fraunhofer : une source lumineuse (spectrale) est envoyée à l'infini avec une première lentille, on place l'interféromètre, et on projette les interférences localisées à l'infini sur un écran avec une seconde lentille convergente.

5. On se place dans la suite dans le cas d'une cavité symétrique où $R_1 = R_2$. Simplifier l'expression de I_{\max} et m . Quel phénomène étonnant (ou pas) se produit à résonance ?

Correction

Pour une cavité symétrique, on a : $I_{\max} = I_0$, et $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

À résonance, l'intensité transmise est égale à I_{\max} , donc égale à I_0 . Toute l'intensité lumineuse entrante est transmise, quels que soient les valeurs de r et t !

6. On définit la finesse de la cavité \mathcal{F} par le rapport de la distance entre deux pics sur la largeur à mi-hauteur d'un pic de $I(\varphi)$. Montrer que dans le cas de deux miroirs identiques $R_1 = R_2$, celle-ci s'écrit :

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (4)$$

Correction

Sur le graphe, la distance entre deux pics est 2π . Quelle est la largeur à mi-hauteur ? On cherche

$$I_t = I_{\max} \frac{1}{1 + m \sin^2(\varphi/2)} = \frac{I_{\max}}{2}$$

soit $\sin(\varphi/2) = 1/\sqrt{m}$. Comme $m \gg 1$, on peut linéariser l'équation. On trouve ainsi une largeur à mi-hauteur $\delta\varphi = 2 \times 2/\sqrt{m}$. La finesse s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{4/\sqrt{m}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4R}{(1-R)^2}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

7. Calculer la finesse d'une cavité pour lorsque les miroirs sont
- des miroirs métalliques en aluminium ($R \sim 90\%$ dans le visible)
 - des miroirs diélectriques standards de recherche (par exemple chez <https://www.thorlabs.com/>);
 - pour une diode laser (milieu intérieur d'indice $n \sim 3,5$);

Correction

- miroirs métalliques : $\mathcal{F} = 30$;
- miroirs diélectriques : $R \sim 99,5\%$, d'où $\mathcal{F} = 626$;

$$(c) \text{ diode laser : } R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 31 \%, \text{ d'où } \mathcal{F} = 2,5$$

8. Rappeler comment varie l'amplitude de l'onde ayant fait N allers-retours dans la cavité en fonction de N . L'écrire en fonction de \mathcal{F} , et en déduire une interprétation physique de \mathcal{F} .

Correction

Pour $R \approx 1$, la finesse se simplifie : $\mathcal{F} = \frac{\pi}{1-R}$, d'où $R = 1 - \pi/\mathcal{F}$. Ainsi, si on note a_N l'amplitude de l'onde réfléchiée N fois :

$$a_N \propto R^N = \left(1 - \frac{\pi}{\mathcal{F}} \right)^N = e^{N \ln(1 - \pi/\mathcal{F})} \approx e^{-\pi N/\mathcal{F}}$$

On en déduit que si $N \geq \mathcal{F}$, alors l'amplitude devient négligeable. On peut donc dire que \mathcal{F} correspond au nombre d'allers-retours de l'onde à l'intérieur de la cavité.

2 Utilisation en spectromètre

Les interféromètres Fabry-Perot étaient autrefois très utilisés pour déterminer le spectre d'un gaz d'atomes excités par une décharge électrique. Intéressons-nous aux propriétés d'un tel spectromètre, dont l'objectif est de séparer et identifier deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 proches.

9. Pour récupérer le spectre d'une source lumineuse, on plaçait au centre de la figure d'interférence ($\theta = 0$) un détecteur photo-sensible, et on translaitait très lentement un des miroirs de l'interféromètre. Expliquer en quoi l'enregistrement de l'intensité I en fonction de L permettra d'en déduire le spectre de la source.

Correction

Avec le protocole précédent, on va mesurer l'intensité lumineuse pour $i = 0$, donc avec un paramètre $\varphi(t) = 4\pi nL(t)\nu/c$ qui dépend du temps. Comme L varie linéairement, l'enregistrement permet de faire varier l'ordre d'interférence constructive au centre de la figure.

10. Pour un ordre p donné, quelle est la plus petite différence de longueurs d'onde $\Delta\lambda_{\text{lim}}$ qu'il est possible de séparer avec un interféromètre de Fabry-Perot ? Exprimer le pouvoir de résolution $\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda$ en fonction de la finesse, et de l'ordre d'interférence p .

Correction

Comme pour le spectromètre à réseau, la limite de résolution est limitée par la dispersion angulaire (ou linéaire) de l'appareil. On a calculé la taille à mi-hauteur d'un pic, ce qui fixe la différence de longueur d'onde détectable $\delta\lambda$:

$$\delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}} = \delta \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) = -2\pi \frac{\delta}{\lambda^2} \delta\lambda = -2\pi p \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

Le pouvoir de résolution vaut donc (en valeur absolue) :

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = p\mathcal{F}.$$

11. Pour un ordre p donné, quelle est la plus grande différence de longueurs d'onde $\Delta\lambda_{\text{ISL}}$ qu'il est possible de mesurer ? Cet intervalle est appelé *intervalle spectral libre*. Relier $\Delta\lambda_{\text{ISL}}$, \mathcal{F} et \mathcal{R} .

Correction

Si jamais les longueurs d'onde sont trop différentes, alors l'ordre $p + 1$ de λ_2 risque d'être entre p et $p + 1$ de la longueur d'onde λ_1 . Il sera donc impossible de donner la différence entre les deux longueurs d'onde (*on ne donne la différence de longueur d'onde que modulo la distance entre deux pics !*) La différence maximale entre deux pics est donnée par $\Delta\varphi = 2\pi$, ce qui va correspondre en différenciant une nouvelle fois la relation de φ :

$$2\pi = \Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda^2} \Delta\lambda = 2\pi p \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

soit :

$$\Delta\lambda_{\text{ISL}} = \frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda^2}{2ne}$$

Assez naturellement, plus on s'intéresse à un ordre élevé, plus la distance maximale entre deux longueurs d'onde sera faible. Pour un Fabry-Perot étalon, on peut aussi répercuter cette limite sur l'épaisseur e : plus e est faible, plus la distance entre deux pics sera grande, donc plus l'intervalle spectral libre sera grand.

On peut réécrire cette relation :

$$\Delta\lambda_{\text{ISL}} = \lambda \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

3 Cavité de filtrage

Une cavité Fabry-Perot peut aussi être utilisée comme un appareil permettant de filtrer le bruit d'un faisceau laser, et ce, grâce à la forme très aiguë des pics qui composent sa fonction de transmission. Étudions plus en détail cette caractéristique.

12. Supposons que le champ entrant ait une fréquence ν proche d'une fréquence de résonance ν_p de la cavité. Simplifier la fonction de transmission $t(\nu)$ de la cavité Fabry-Perot. Faire apparaître une fréquence caractéristique ν_{cav} , et l'écrire en fonction de la finesse et de l'intervalle spectral libre.

Correction

Supposons qu'une fréquence ν entre dans la cavité, qui est très proche d'une fréquence de résonance ν_p . On écrit $\nu = \nu_p + \delta\nu$, et $\varphi = 2\pi p + \delta\varphi$ avec $\delta\varphi = 2\pi\Delta\delta\nu/c$ (on a renommé $\Delta = 2nL$ pour plus de clarté). Puisque $\delta\varphi \ll 1$, on a d'après la question 2 :

$$t(\nu) = \frac{T e^{i\varphi/2}}{1 - R e^{i\varphi}} = \frac{T e^{i(\pi p + \delta\varphi/2)}}{1 - R e^{i\delta\varphi}} \approx \pm \frac{T}{1 - R(1 + i\delta\varphi)} = \frac{T}{1 - R + 2i\pi\Delta\delta\nu/c} = \frac{1}{1 + i \frac{\nu - \nu_p}{\nu_{\text{cav}}}}$$

avec $\nu_{\text{cav}} = \frac{c(1-R)}{2\pi\Delta} = \frac{c}{2\Delta\mathcal{F}} = \frac{\Delta\lambda_{\text{ISL}}}{2\mathcal{F}}$. Puisque $t(\nu)$ est une fonction de transfert, la fréquence ν_{cav} joue le rôle de fréquence de coupure pour la cavité. Plus la finesse de la cavité est grande, plus cette fréquence est faible.

13. On suppose que le champ incident à la fréquence ν_0 qui est un mode propre de la cavité est modulé en amplitude à une fréquence ν_{mod} :

$$\alpha_{\text{in}} = \alpha_0 e^{2i\pi\nu_0 t} (1 + \beta \cos(2\pi\nu_{\text{mod}} t)), \quad (5)$$

avec β réel et $\beta \ll 1$. Comment calculer le champ transmis ? L'exprimer de façon simple.

Correction

Si on module à une fréquence ν_{mod} , alors le signal aura trois composantes spectrales, à savoir ν et $\nu \pm \nu_{\text{mod}}$. On s'intéresse à des effets linéaires, donc le résultat sera la somme des réponses de l'interféromètre pour chacune des ondes incidentes. Donc si le champ incident s'écrit $\alpha_{\text{in}} = \sum_{\nu} \alpha_{\nu}$, le champ total transmis sera

$$\alpha_t = \sum_{\nu} t(\nu) \alpha_{\nu}$$

avec $t(\nu)$ la fonction de transmission de l'interféromètre. On a :

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_0 e^{2i\pi\nu_0 t} \left(t(\nu_0) + \frac{\beta}{2} (t(\nu_0 + \nu_{\text{mod}}) e^{2i\pi\nu_{\text{mod}} t} + t(\nu_0 - \nu_{\text{mod}}) e^{-2i\pi\nu_{\text{mod}} t}) \right) \\ &= \alpha_0 e^{2i\pi\nu_0 t} \left(1 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{e^{2i\pi\nu_{\text{mod}} t}}{1 + i \frac{\nu_{\text{mod}}}{\nu_{\text{cav}}}} + \frac{e^{-2i\pi\nu_{\text{mod}} t}}{1 - i \frac{\nu_{\text{mod}}}{\nu_{\text{cav}}}} \right) \right) \\ &= \alpha_0 e^{2i\pi\nu_0 t} \left(1 + \beta \operatorname{Re} e^{\left(\frac{e^{2i\pi\nu_{\text{mod}} t}}{1 + i \frac{\nu_{\text{mod}}}{\nu_{\text{cav}}}} \right)} \right) \\ &= \alpha_0 e^{2i\pi\nu_0 t} \left(1 + \beta \frac{\cos(2\pi\nu_{\text{mod}} t - \psi)}{\sqrt{1 + \frac{\nu_{\text{mod}}^2}{\nu_{\text{cav}}^2}}} \right) \end{aligned}$$

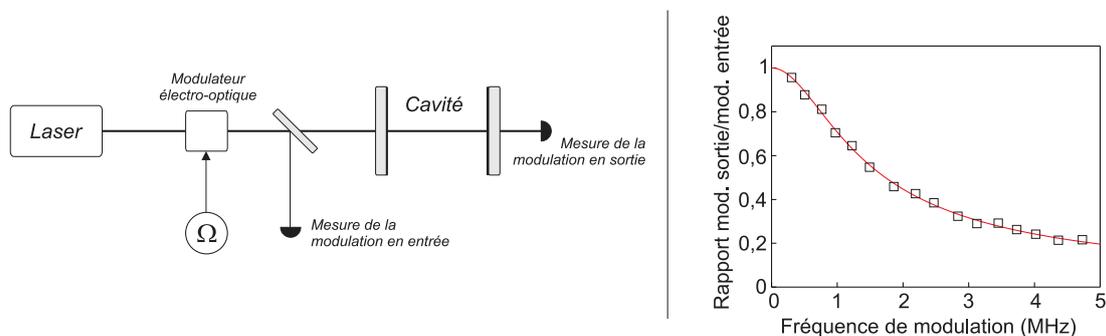
où ψ est la phase du dénominateur de l'avant-dernière ligne.

14. On suppose que la fréquence ν est exactement une fréquence de résonance de l'interféromètre, et que $\nu_{\text{mod}} \ll \Delta\nu_{\text{ISL}}$. Simplifier l'expression de la fonction de transmission de la cavité. Quel est l'effet de la cavité sur la modulation d'amplitude ? Comment le mesurer ?

Correction

La cavité se comporte donc comme un filtre passe-bas vis-à-vis d'une modulation d'intensité : les fréquences $\nu_{\text{mod}} \ll \nu_{\text{cav}}$ sont transmises alors que les fréquences $\nu_{\text{mod}} \geq \nu_{\text{cav}}$ sont filtrées par la cavité.

On peut vérifier cet effet et mesurer la bande passante ν_{cav} en traçant un diagramme de Bode du rapport modulation en sortie/modulation en entrée.



Gauche : Principe de la mesure de la bande passante d'une cavité avec une modulation d'amplitude du faisceau laser incident. Les variations de l'amplitude de la modulation de sortie décrivent une lorentzienne (centrée en 0) quand on fait varier la fréquence de la bande latérale. La mesure directe de la modulation en entrée permet de s'affranchir de la réponse en fréquence du modulateur électro-optique. Droite : Points expérimentaux (la taille des carrés figure la barre d'erreur) et ajustement des points par une lorentzienne. La bande passante est ici de 1 MHz.

15. Expliquer pourquoi la cavité peut être considérée comme une *cavité de filtrage* vis-à-vis d'un bruit d'amplitude.

Correction

Un faisceau laser présentant du bruit d'intensité peut être traité formellement en sommant sur toutes les fréquences (continues) de modulation possibles. Par linéarité, on voit que le bruit d'intensité sera filtré par la cavité pour les fréquences supérieures à la bande passante de la cavité ν_{cav} .

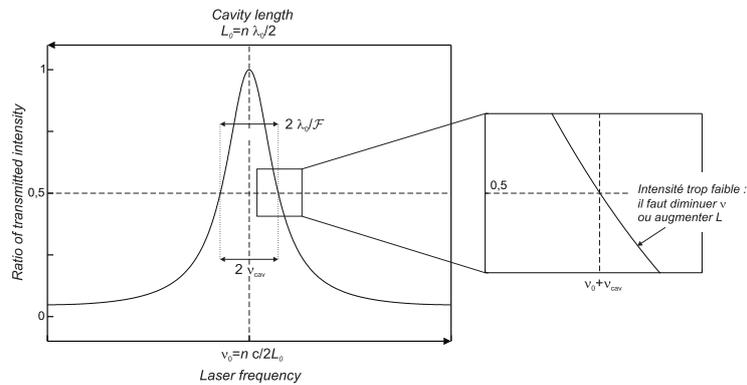
4 Cavités asservies

La fréquence du laser présente des fluctuations au cours du temps. On désire *asservir* la longueur de la cavité afin de suivre ces fluctuations et de fixer le point de fonctionnement du système. Pour cela, on peut utiliser une cale piézo-électrique pour modifier la longueur de la cavité.

16. Comment peut-on asservir la cavité à mi-hauteur de la courbe de résonance ?

Correction

Il faut comparer l'intensité transmise à une valeur de référence pour savoir si on s'est écarté du point de fonctionnement désiré par la droite ou la gauche. Le signal peut ensuite être amplifié pour piloter une cale piézoélectrique (dont le déplacement est proportionnel à la tension appliquée) et ainsi déplacer un des miroirs de la cavité (collé dessus).

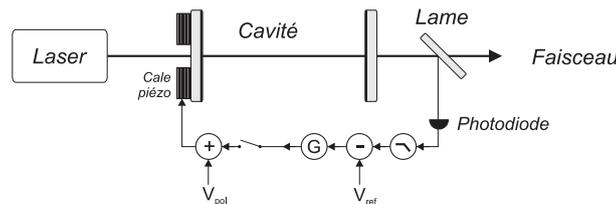


Principe de l'asservissement d'une cavité à mi-hauteur de la résonance. Gauche : courbe de résonance de la transmission d'une cavité (calculée pour $\mathcal{F} = 20$) sur un intervalle spectral libre, quand on fait varier la fréquence du laser à longueur L_0 fixée (échelle du bas) ou quand on fait varier la longueur de la cavité à fréquence ν_0 du laser fixée (échelle du haut). Noter que la longueur de la cavité doit être définie à mieux que λ_0/\mathcal{F} , ≈ 10 pm par exemple pour une cavité de finesse 100 000 ! Droite : Zoom à mi-hauteur. La mesure de l'intensité transmise peut être comparée à une valeur de référence pour fournir un signal d'erreur à l'asservissement.

17. Peut-on procéder de la même façon pour l'asservir à résonance ?

Correction

Non car si l'intensité s'écarte de la valeur désirée (maximale), on ne peut pas savoir si c'est par la droite ou par la gauche ! Il y a toute une quantité de techniques basées sur des (faibles) modulations de la fréquence du laser ou de la longueur de la cavité. Cf. l'article joint au corrigé pour la technique la plus répandue : la technique dite de *Pound-Drever-Hall*.



Implémentation de la boucle d'asservissement (ouverte, et donc inopérante sur la figure) de la cavité sur le laser. Une partie de l'intensité transmise est prélevée avec une lame partiellement réfléchissante (typiquement $R = 5\%$), filtrée (pour supprimer les fluctuations très rapides que la cale piézo ne parviendra pas à suivre) et comparée à une tension de référence V_{ref} (qui fixe le point de fonctionnement désiré du système). Le signal d'erreur ainsi obtenu (typiquement de l'ordre du V) est proportionnel à $(L - L_0)$. Il est amplifié et ajouté à une tension continue V_{pol} (qui permet de fixer la longueur de la cavité quand la boucle d'asservissement est ouverte). Selon le miroir collé sur la cale piézo et le côté de la résonance choisi, le gain G doit être positif ou négatif pour stabiliser le point de fonctionnement.

À retenir

- ★ Un interféromètre de Fabry-Perot est un système d'interférence à N ondes. L'éclairement transmis **présente des pics très pointus**, similaire à celle d'un réseau (aussi interférences à N ondes). Sa figure d'interférences sont des cercles concentriques (rappelant l'interféromètre de Michelson en lame d'air).
- ★ Un tel interféromètre est caractérisé par sa **finesse** \mathcal{F} (distance entre deux pics divisé par la largeur d'un pic). \mathcal{F} s'interprète qualitativement comme **le nombre d'aller-retours** de l'onde entre les miroirs.
- ★ La finesse est déterminée par la réflectivité des miroirs. Plus ils sont réfléchissant, plus \mathcal{F} est grand. Pour un miroir diélectrique standard, $R \approx 99,5\%$ et $\mathcal{F} \approx 600$.
- ★ L'utilisation historique est d'être un **spectromètre**, donc mesurer des écarts de longueurs d'onde. Son pouvoir de résolution augmente avec \mathcal{F} .
- ★ La périodicité des pics d'interférences implique une limite maximale de détection de longueurs d'ondes, appelée **intervalle spectral libre**. Il diminue si le pouvoir séparateur augmente.

★ Utilisations actuelle du Fabry-Perot : cavité de **filtrage** (puisque'il sélectionne très finement ses fréquences de résonances), et **asservissement en longueur d'onde** d'un laser.