Arnaud Raoux (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
https://www.phys.upmc.fr/~araoux/

TD 2: Propriétés des cavités Fabry-Perot

On s'intéresse à une cavité Fabry-Perot, constituée de deux miroirs parallèles, séparés par une distance L. On va en étudier les propriétés générales, ainsi que quelques applications.

1 Calcul des champs réfléchi et transmis. Finesse d'une cavité

Soient r_i et t_i ($i = 1$ ou 2) les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des deux miroirs plans. On négligera les pertes des miroirs, si bien que $R_i + T_i = 1$ avec $R_i = |r_i|^2$.[1] [2]

On notera α_{in} l'amplitude complexe du champ incident, α_{r} celle du champ réfléchi et α_{t} celle du champ transmis. Le faisceau incident est une onde plane de fréquence ν dont le vecteur d'onde est incliné par rapport à l'axe optique d'un angle θ. Le milieu entre les deux miroirs est homogène et isotrope d'indice optique n.

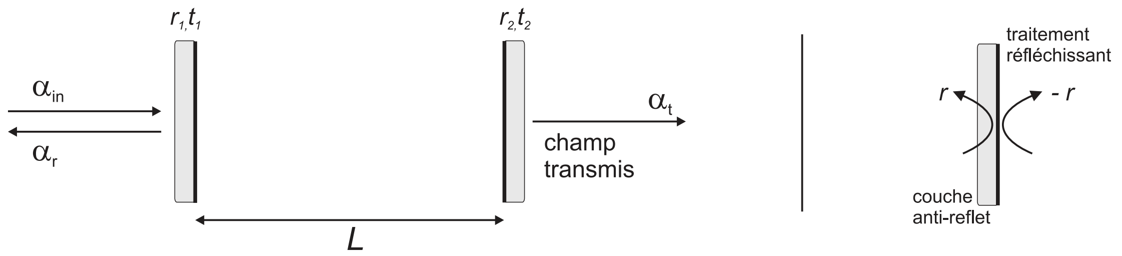

Figure 1 – Gauche : Notations pour le calcul des champs. Droite : Valeurs des coefficients de réflexion d'un miroir pour deux ondes incidentes de deux côtés différents.

1. Écrire les champs transmis et réfléchi comme le résultat de l'interférence entre différentes ondes. On notera φ le déphasage du champ lors d'un aller-retour dans la cavité :

$$\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}. \qquad \text{avec} \qquad \delta = 2nL\cos\theta \tag{1}$$

avec $\theta = 0$ pour une incidence normale.

2. Montrer que les champs transmis et réfléchis peut s'écrire respectivement :

$$\alpha_{\text{t}} = \frac{t_1 t_2\, \mathrm{e}^{i\varphi/2}}{1 - r_1 r_2\, \mathrm{e}^{i\varphi}}\alpha_{\text{in}} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{\text{r}} = \frac{r_1 - r_2\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2\, \mathrm{e}^{i\varphi}}\alpha_{\text{in}}. \tag{2}$$

3. En déduire que l'intensité transmise I_{t} se met sous la forme :

$$I_{\text{t}} = \frac{I_{\max}}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}, \tag{3}$$

où on explicitera les coefficients $I_{\max}$ et m. Estimer m pour des coefficients de réflexion $R_1 = R_2 = 95\,\%$. En déduire une approximation utile pour la suite de cette étude.

4. Tracer la fonction $I_{\text{t}}(\varphi)$ (sa forme est appelée *fonction d'Airy*). Quelle est la figure observée en sortie d'interféromètre ? Préciser le montage optique réalisé.

5. On se place dans la suite dans le cas d'une cavité symétrique où $R_1 = R_2$. Simplifier l'expression de $I_{\max}$ et m. Quel phénomène étonnant (ou pas) se produit à résonance ?

1. Cette approximation est discutable pour des miroirs métalliques, mais très bonne pour des miroirs diélectriques.
2. Attention, la relation $R = |r|^2$ est toujours vraie, mais $T = |t|^2$ n'est **pas** vraie dans le cas général d'un problème de transmission ! En particulier si le milieu d'arrivée a un indice différent, ou si l'incidence est oblique.

6. On définit *la finesse* de la cavité $\mathcal{F}$ par le rapport de la distance entre deux pics sur la largeur à mi-hauteur d'un pic de $I(\varphi)$. Montrer que dans le cas de deux miroirs identiques $R_1 = R_2$, celle-ci s'écrit :

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \tag{4}$$

7. Calculer la finesse d'une cavité pour lorsque les miroirs sont
   (a) des miroirs métalliques en aluminium ($R \sim 90\%$ dans le visible)
   (b) des miroirs diélectriques standards de recherche (par exemple chez https://www.thorlabs.com/) ;
   (c) pour une diode laser (milieu intérieur d'indice $n \sim 3{,}5$) ;
8. Rappeler comment varie l'amplitude de l'onde ayant fait N allers-retours dans la cavité en fonction de N. L'écrire en fonction de $\mathcal{F}$, et en déduire une interprétation physique de $\mathcal{F}$.

2 Utilisation en spectromètre

Les interféromètres Fabry-Perot étaient autrefois très utilisés pour déterminer le spectre d'un gaz d'atomes excités par une décharge électrique. Intéressons-nous aux propriétés d'un tel spectromètre, dont l'objectif est de séparer et identifier deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 proches.

9. Pour récupérer le spectre d'une source lumineuse, on plaçait au centre de la figure d'interférence ($\theta = 0$) un détecteur photo-sensible, et on translatait très lentement un des miroirs de l'interféromètre. Expliquer en quoi l'enregistrement de l'intensité I en fonction de L permettra d'en déduire le spectre de la source.
10. Pour un ordre p donné, quelle est la plus petite différence de longueurs d'onde $\Delta\lambda_{\mathrm{lim}}$ qu'il est possible de séparer avec un interféromètre de Fabry-Perot ? Exprimer le pouvoir de résolution $\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda$ en fonction de la finesse, et de l'ordre d'interférence p.
11. Pour un ordre p donné, quelle est la plus grande différence de longueurs d'onde $\Delta\lambda_{\mathrm{ISL}}$ qu'il est possible de mesurer ? Cet intervalle est appelé *intervalle spectral libre*. Relier $\Delta\lambda_{\mathrm{ISL}}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}$.

3 Cavité de filtrage

Une cavité Fabry-Perot peut aussi être utilisée comme un appareil permettant de filtrer le bruit d'un faisceau laser, et ce, grâce à la forme très aiguë des pics qui composent sa fonction de transmission. Étudions plus en détail cette caractéristique.

12. Supposons que le champ entrant ait une fréquence ν proche d'une fréquence de résonance ν_p de la cavité. Simplifier la fonction de transmission $t(\nu)$ de la cavité Fabry-Perot. Faire apparaître une fréquence caractéristique ν_{cav}, et l'écrire en fonction de la finesse et de l'intervalle spectral libre.
13. On suppose que le champ incident à la fréquence ν_0 qui est un mode propre de la cavité est modulé en amplitude à une fréquence ν_{mod} :

$$\alpha_{\mathrm{in}} = \alpha_0\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu_0}\left(1 + \beta\cos(2\pi\nu_{\mathrm{mod}}t)\right), \tag{5}$$

   avec β réel et $\beta \ll 1$. Comment calculer le champ transmis ? L'exprimer de façon simple.
14. On suppose que la fréquence ν est exactement une fréquence de résonance de l'interféromètre, et que $\nu_{\mathrm{mod}} \ll \Delta\nu_{\mathrm{ISL}}$. Simplifier l'expression de la fonction de transmission de la cavité. Quel est l'effet de la cavité sur la modulation d'amplitude ? Comment le mesurer ?
15. Expliquer pourquoi la cavité peut être considérée comme une *cavité de filtrage* vis-à-vis d'un bruit d'amplitude.

4 Cavités asservies

La fréquence du laser présente des fluctuations au cours du temps. On désire *asservir* la longueur de la cavité afin de suivre ces fluctuations et de fixer le point de fonctionnement du système. Pour cela, on peut utiliser une cale piézo-électrique pour modifier la longueur de la cavité.

16. Comment peut-on asservir la cavité à mi-hauteur de la courbe de résonance ?
17. Peut-on procéder de la même façon pour l'asservir à résonance ?