Arnaud RAOUX (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
https://www.phys.upmc.fr/~araoux/

TD 10 : Statistique de photons et lumière quantique

En 1905, Einstein explique l'effet photo-électrique à partir de la quantification de l'énergie lumineuse. Si son article est capital dans le développement de la mécanique quantique, l'effet photo-électrique a été ré-expliqué *a posteriori* par une théorie semi-classique où la matière est décrite de manière quantique et le rayonnement par une théorie classique. Il a fallu attendre la fin du XX[e] siècle pour enfin démontrer la quantification de la lumière grâce aux sources à photons uniques.

Dans ce TD, l'objectif sera de mettre en avant les méthodes de classification d'une lumière purement quantique, que l'on opposera à une lumière cohérente, partiellement cohérente, chaotique ou thermique. Pour décrire un rayonnement, on naviguera entre une description classique en termes d'intensité lumineuse et une description quantique avec la notion de photon.

1 Statistiques de photons

Dans cette partie, on caractérise les différents rayonnements en fonction de leur statistique de comptage de photons.

1. Pour un faisceau laser à la fréquence ν, exprimer le lien entre le flux de photons Φ et l'intensité lumineuse I (considérée comme constante sur une section A du faisceau). Donner l'ordre de grandeur de Φ pour un laser habituel de TP.

Correction

Un laser de salle de TP a une puissance typique de $P = 5\,\mathrm{mW}$, pour une longueur d'onde $600\,\mathrm{nm}$. On a donc :

$$\Phi = \frac{IA}{\hbar\nu} = \frac{P}{\hbar\nu} = \frac{5\times10^{-3}\times6\times10^{-7}}{6\times10^{-34}\times3\times10^{8}} \approx 2\times10^{16}\,\mathrm{photons/s}$$

2. On considère dans cette question un rayonnement d'OPPH d'intensité strictement constante, parcourant une distance L. Soit X la variable aléatoire du nombre de photons dans $[0,L]$, on supposera qu'ils sont répartis aléatoirement. En découpant $[0,L]$ en N intervalles, déterminer la loi de probabilité $\mathcal{P}(X=n)$ et faites tendre $N\to\infty$. Déterminer $\bar{n} = \mathbb{E}(X)$ et $(\Delta n)^2 = V(X)$. Quel est le lien entre $\bar{n}$ et Φ ?

Correction

Si on découpe l'intervalle en N sous-intervalles suffisamment petits, alors il y aura 0 ou 1 photons dans ce sous-intervalle (la probabilité d'en avoir plus qu'un devenant négligeable). On a approximativement une loi de Bernoulli de paramètre p, la probabilité de trouver un photon dans un intervalle.

Si $N\to\infty$, alors $p\to0$. On comprend que la grandeur d'intérêt physique est le produit $x = pN$ qui reste constant.

Les photons étant indépendants les uns des autres, la probabilité de trouver n photons dans $[0,L]$ suit une loi binomiale de paramètre p :

$$\mathcal{P}(X=n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Pour trouver la limite $N\to\infty$, on fait apparaître $x = pN$:

$$\mathcal{P}(X=n) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}\,\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{x}{N}\right)^N \frac{1}{\left(1-\frac{x}{N}\right)^n}$$

Le premier facteur est le produit de n termes : $1\cdot(1-\frac{1}{N})\dots(1-\frac{n-1}{N})$ qui tend vers 1 lorsque $N\to\infty$. Le deuxième facteur ne dépend pas de N, le troisième est une suite bien connue qui converge vers e^{-x}, et enfin le dernier est un produit de n termes qui tendent tous vers 1. Finalement

$$\mathcal{P}(X=n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^n}{n!}$$

On retrouve qu'une loi binomiale tend vers une loi de Poisson lorsque l'événement est rare ($p\to0$). L'espérance se calcule alors :

$$\bar{n} = \mathbb{E}(X) = \sum_{n\geq 0} n\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} = x$$

On calcule de même la variance, et on trouve alors

$$\boxed{\bar{n} = x = pN} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(\Delta n)^2 = \bar{n}}$$

Un faisceau lumineux d'intensité constante n'a pas un nombre de photons fixé, seulement un *nombre moyen* de photons fixé à $\bar{n}$, et relié à l'intensité et au flux de photons par : $\bar{n} = \Phi\frac{L}{c} = \frac{IA}{\hbar\nu}\frac{L}{c}$.

3. Peut-on trouver des rayonnement tels que $(\Delta n)^2 > \bar{n}$ ou $(\Delta n)^2 < \bar{n}$? Une interprétation en termes de photons est-elle nécessaire ?

Correction

Dans le cas où l'intensité du rayonnement est constante, on vient de voir que $(\Delta n)^2 = \bar{n}$. En présence de fluctuations d'intensité, on s'attend à une augmentation des fluctuations du bruit de photons, donc $(\Delta n)^2 > \bar{n}$, ce qu'on appelle un rayonnement *sur-poissonnien*.

Pour avoir $(\Delta n)^2 < \bar{n}$, il suffira de maîtriser le nombre de photons dans le faisceau lumineux : si on réussit à avoir une source qui émet à intervalles réguliers exactement 1 photon, on pourrait avoir $\Delta n = 0$, et être dans un régime *sous-poissonien*. Cependant, un tel rayonnement n'est pas accessible en optique classique : la lumière la plus « parfaite » que l'on puisse avoir, c'est $I =$ cste, pour lequel la distribution est poissonienne...

4. On s'intéresse au cas du rayonnement émis par un corps à l'équilibre avec un thermostat de température T, et en particulier à un mode d'émission à la pulsation ω.

(a) Quelle est l'énergie d'un tel mode peuplé par n photons ?

(b) Déterminer à l'équilibre thermique la probabilité $\mathcal{P}(X = n)$ d'avoir n photons dans le rayonnement, ainsi que son espérance. Quelle est la loi suivie par $\bar{n}$?

(c) Calculer sa variance, et interpréter son expression.

(d) On peut montrer que la variance d'un rayonnement polychromatique s'écrit $(\Delta n)^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{N_m}$ où N_m est le nombre de modes. Justifier qualitativement l'effet des autres modes, et déterminer le type de distribution pour un rayonnement passant à travers un filtre interférentiel habituel.

Correction

(a) La loi de Planck s'obtient en quantifiant le rayonnement électromagnétique : pour chaque fréquence autorisée, l'énergie est celle d'un oscillateur harmonique : $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ où n le nombre de modes est le nombre de photons.

(b) À l'équilibre thermique, on se place dans l'ensemble canonique, et la probabilité d'avoir n photons peut s'écrire :

$$\mathcal{P}(X = n) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_n}}{Z} = \frac{\mathrm{e}^{-y(n+1/2)}}{Z} = \frac{\mathrm{e}^{-yn}}{\sum_{p\geq 0}\mathrm{e}^{-yp}} = (1 - \mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{e}^{-yn}$$

où $y = \beta\hbar\omega$.

L'espérance de cette loi vaut

$$\mathbb{E}(X) = \bar{n} = \sum_{n\geq 0} n\mathcal{P}(X = n) = (1 - \mathrm{e}^{-y})\sum_{n\geq 0} n\,\mathrm{e}^{-yn} = (1 - \mathrm{e}^{-y})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-y}}\right)$$

Et on trouve alors :

$$\bar{n} = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{1 - \mathrm{e}^{-y}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Le nombre moyen de photons $\bar{n}$ suit donc la loi de Bose-Einstein, avec un potentiel chimique nul. Ceci n'est pas surprenant : les photons sont des bosons, et on se trouve à l'équilibre thermique.

(c) Calculons maintenant la variance de cette loi :

$$V(X) = \sum_{n \geq 0} n^2 \mathcal{P}_n - \bar{n}^2 = (1 - \mathrm{e}^{-y}) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-y}} \right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{-y}}{1 - \mathrm{e}^{-y}} \right)^2$$

qui se développe :

$$V(X) = (1 - \mathrm{e}^{-y}) \frac{\mathrm{e}^{-y}(1 - \mathrm{e}^{-y})^2 + \mathrm{e}^{-y}\, 2\,\mathrm{e}^{-y}(1 - \mathrm{e}^{-y})}{(1 - \mathrm{e}^{-y})^4} - \frac{\mathrm{e}^{-2y}}{(1 - \mathrm{e}^{-y})^2} = \frac{\mathrm{e}^{-y}(1 - \mathrm{e}^{-y}) + \mathrm{e}^{-2y}}{(1 - \mathrm{e}^{-y})^2}$$

et ainsi :

$$\boxed{(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2}$$

On trouve donc une distribution sur-poissonienne. On peut interpréter les deux facteurs du second membre : la variance a deux origines bien distinctes : d'un côté la quantification des échanges d'énergie (les photons) qui donne le caractère poissonien, et de l'autre un terme $\bar{n}^2$ qui provient des fluctuations thermiques d'intensité du rayonnement à l'équilibre.

Correction

(d) L'effet d'addition des autres modes du rayonnement, a pour effet de « lisser » le caractère sur-poissonien de la distribution de photons. Un peu comme la somme de variables aléatoires i.i.d. converge (sous de bonnes conditions) vers une loi gaussienne, même si ces lois ne sont pas gaussiennes (loi des grands nombres), ici la somme de distributions de photons non-poissoniennes converge vers une loi de Poisson.

Calcul de N_m : Combien y a-t-il de modes possible dans une bande d'énergie ΔE ? Il faut pour cela calculer une densité d'états. À trois dimensions, dans une boîte de volume V, la densité d'états $\rho(E)$ pour des photons (2 polarisations, relation de dispersion $E = cp = c\hbar k$) est déterminée par :

$$\rho(E)\mathrm{d}E = 2 \times \frac{V}{8\pi^3} \times 4\pi k^2 \mathrm{d}k = \frac{V}{\pi^2} \frac{E^2}{\hbar^3 c^3} \mathrm{d}E$$

Avec $E = \frac{hc}{\lambda}$, on a $\mathrm{d}E = \frac{hc\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$. Pour une plage $\Delta\lambda = 10\,\mathrm{nm}$ d'un filtre interférentiel de TP et avec un volume de 1 m^3, on a

$$N_m = \rho(E)\mathrm{d}E = \frac{8\pi V}{\lambda^4} \Delta\lambda = \frac{8 \times 3 \times 1}{(6 \times 10^{-7})^4} \times 10^{-8} = \frac{2}{100} \times 10^{20} = 10^{18}\,\text{modes}$$

Ainsi, il sera difficile d'observer le caractère non-poissonien, sauf dans des très petites boîtes.

5. En quoi consisterait un rayonnement vérifiant $\Delta n = 0$? Si on envoie un tel rayonnement sur un élément optique –une lame séparatrice 50/50 par exemple– quel sera l'effet sur la statistique de photons ?

Correction

cf. ci-dessus : un rayonnement avec $\Delta n = 0$ correspond à une émission régulière de photons. Un tel rayonnement nécessite une description quantique de la lumière, c.-à.d. une quantification des échanges d'énergie électromagnétique.

Une lame 50/50 coupe le rayonnement en deux flux divisés par deux *en moyenne*. Donc si on envisage un train régulier de photons, la lame ne sépare pas un photon sur deux, mais un photon sur deux en moyenne. Ce qui détruit la statistique sous-poissonienne de photons.

6. On peut montrer que le nombre de coups N détectés sur un photodétecteur suit également une variable aléatoire, et la variance de cette distribution de probabilité s'écrit :

$$(\Delta N)^2 = \eta^2 (\Delta n)^2 + \eta(1 - \eta)\bar{n} \tag{1}$$

où $\eta = \frac{\bar{N}}{\bar{n}}$ est le rendement quantique du détecteur. Quelles propriétés peut-on en tirer ? Justifier de la difficulté de détecter une lumière quantique.

Correction

Si η est le rendement quantique, alors la moyenne du nombre de coups détectés est $\bar{N} = \eta\bar{n}$.

— Si le flux de photons est poissonien, $\Delta n^2 = \bar{n}$, ainsi $(\Delta N)^2 = \eta\bar{n} = \bar{N}$. La distribution de coups détectés est poissonienne, quel que soit le rendement quantique η.

— Si $\eta = 1$, alors le détecteur reproduit fidèlement la statistique de photons : $\Delta N = \Delta n$.

— Si à l'inverse $\eta \ll 1$, alors le premier terme devient négligeable, et on obtient $(\Delta N)^2 = \eta\bar{n} = \bar{N}$. On retrouve une statistique poissonienne.

Avec les deux dernières questions, on comprend qu'une statistique sous-poissonienne est très fragile. Même si on arrive à produire une telle distribution, les éléments optiques peuvent la détériorer, ainsi qu'un détecteur peut efficace. C'est l'invention de détecteur avec de très bons rendements quantiques qui a permis la découverte de statistiques sous-poissoniennes, et ainsi de la preuve de l'existence du photon.

2 Fonction de corrélation

Une autre façon de caractériser la lumière est d'étudier la fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ définie par

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle \langle I(t+\tau)\rangle} \tag{2}$$

7. Hanbury-Brown et Twiss ont mis au point un interféromètre qui permet de mesurer cette fonction. Soit une source lumineuse qui éclaire une lame séparatrice. On place deux photodétecteurs sur les deux trajets possibles, qui émettent en retour des photo-courants i_1 et i_2. L'un des deux signaux passe dans une ligne à retard, puis les deux sont multipliés et moyennés sur un temps long. Justifier que ce système permet d'obtenir un signal proportionnel à $g^{(2)}(\tau)$.

Correction

Les courants des photo-détecteurs sont proportionnels à l'intensité lumineuse reçue (et non le champ électrique). Le signal observé est $\langle i_1(t)i_2(t+\tau)\rangle$, et $i_1(t) = i_2(t) = I(t)/2$. Ainsi, le signal mesuré est bien $\propto \langle I(t)I(t+\tau)\rangle$.

8. La moyenne étant définie comme $\langle I(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N} I(t_i)$, démontrer que $g^{(2)}(0) \geq 1$. Que dire de $g^{(2)}(\infty)$? de $g^{(2)}(0)$ pour un rayonnement cohérent ? pour un rayonnement dont l'intensité fluctue dans le temps ?

Correction

En $\tau = 0$, $g^{(2)}(0) = \frac{\langle I^2(t)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2}$. Une utilisation classique d'identité remarquable (ou inégalité triangulaire) :

$$\left\langle I^2(t)\right\rangle - \langle I(t)\rangle^2 = \frac{1}{N}\sum_i I_i^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{ij} I_i I_j = \frac{1}{N^2}\sum_{ij} \underbrace{\left(\frac{I_i^2 + I_j^2}{2} - I_i I_j\right)}_{\geq 0}$$

Pour un rayonnement cohérent, l'intensité est strictement constante, on a donc $g^{(2)}(\tau) = 1$.

Pour un rayonnement quelconque, on s'attend à avoir des corrélations pour des petits écarts de temps entre les deux détecteurs, qui disparaissent lorsque $\tau \to \infty$. Ainsi, la fonction $g^{(2)}$ d'un rayonnement classique commence plus haut que 1 et tend vers 1.

9. Tracer l'allure attendue de $g^{(2)}$ pour deux rayonnements cohérent et chaotique.

Correction

cf. description à la question précédente.

10. *Approche quantique :* Exprimer maintenant $g^{(2)}(\tau)$ en termes de nombres de photons reçus n_1 et n_2. Tracer le graphe de la fonction $g^{(2)}(\tau)$ pour une lumière où un photon est émis exactement tous les τ_e.

Correction

Le nombre de photons est proportionnel à l'intensité lumineuse (et non le champ électrique). On a donc :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t+\tau)\rangle}{\langle n_1(t)\rangle \langle n_2(t+\tau)\rangle}$$

Supposons qu'exactement un photon est émis par la source. Le photon étant le quantum de lumière, la lame séparatrice a un effet très différent de celui habituel : elle ne sépare pas le faisceau en 50/50, mais envoie l'unique photon d'un côté ou de l'autre. Donc si $n_1(t) = 1$, alors $n_2(t) = 0$ et vice versa. Ainsi, le numérateur de $g^{(2)}$ est toujours nul. Le dénominateur en revanche est non-nul, puisque si n est le flux de photons envoyé par la source, le dénominateur vaut $n^2/4$.
Ainsi, pour un rayonnement quantique, on peut avoir $g^{(2)}(0) < 1$. C'est la caractéristique utilisée historiquement pour prouver l'existence du photon.

11. On classifie les rayonnements selon que les photons sont *groupés* ou *dégroupés*. Représenter les fonctions $g^{(2)}$ correspondantes.

Correction

— Groupés : les photons arrivent par paquets, c'est le cas des lumières classiques. Si on a détection d'un photon sur une voie, alors il y a de fortes de chances d'en détecter un sur l'autre : $g^{(2)}(0) > 1$ puis décroît vers 1.

— Dégroupés : c'est le raisonnement de la question précédente. S'ils sont parfaitement dégroupés, alors $g^{(2)}(0) = 0$, puis croît vers 1.

12. Si une source émet un train régulier d'impulsions avec exactement deux photons, quelle valeur de $g^{(2)}(0)$ attendez-vous ?

Correction

$g^{(2)}(0) = \frac{1}{2}$!