Arnaud RAOUX (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
https://www.phys.upmc.fr/~araoux/

TD 10 : Statistique de photons et lumière quantique

En 1905, Einstein explique l'effet photo-électrique à partir de la quantification de l'énergie lumineuse. Si son article est capital dans le développement de la mécanique quantique, l'effet photo-électrique a été ré-expliqué *a posteriori* par une théorie semi-classique où la matière est décrite de manière quantique et le rayonnement par une théorie classique. Il a fallu attendre la fin du XX^e siècle pour enfin démontrer la quantification de la lumière grâce aux sources à photons uniques.

Dans ce TD, l'objectif sera de mettre en avant les méthodes de classification d'une lumière purement quantique, que l'on opposera à une lumière cohérente, partiellement cohérente, chaotique ou thermique. Pour décrire un rayonnement, on naviguera entre une description classique en termes d'intensité lumineuse et une description quantique avec la notion de photon.

1 Statistiques de photons

Dans cette partie, on caractérise les différents rayonnements en fonction de leur statistique de comptage de photons.

1. Pour un faisceau laser à la fréquence ν, exprimer le lien entre le flux de photons Φ et l'intensité lumineuse I (considérée comme constante sur une section A du faisceau). Donner l'ordre de grandeur de Φ pour un laser habituel de TP.

2. On considère dans cette question un rayonnement d'OPPH d'intensité strictement constante, parcourant une distance L. Soit X la variable aléatoire du nombre de photons dans $[0, L]$, on supposera qu'ils sont répartis aléatoirement. En découpant $[0, L]$ en N intervalles, déterminer la loi de probabilité $\mathcal{P}(X = n)$ et faites tendre $N \to \infty$. Déterminer $\bar{n} = \mathbb{E}(X)$ et $(\Delta n)^2 = V(X)$. Quel est le lien entre $\bar{n}$ et Φ ?

3. Peut-on trouver des rayonnement tels que $(\Delta n)^2 > \bar{n}$ ou $(\Delta n)^2 < \bar{n}$? Une interprétation en termes de photons est-elle nécessaire ?

4. On s'intéresse au cas du rayonnement émis par un corps à l'équilibre avec un thermostat de température T, et en particulier à un mode d'émission à la pulsation ω.

(a) Quelle est l'énergie d'un tel mode peuplé par n photons ?

(b) Déterminer à l'équilibre thermique la probabilité $\mathcal{P}(X = n)$ d'avoir n photons dans le rayonnement, ainsi que son espérance. Quelle est la loi suivie par $\bar{n}$?

(c) Calculer sa variance, et interpréter son expression.

(d) On peut montrer que la variance d'un rayonnement polychromatique s'écrit $(\Delta n)^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{N_m}$ où N_m est le nombre de modes. Justifier qualitativement l'effet des autres modes, et déterminer le type de distribution pour un rayonnement passant à travers un filtre interférentiel habituel.

5. En quoi consisterait un rayonnement vérifiant $\Delta n = 0$? Si on envoie un tel rayonnement sur un élément optique –une lame séparatrice 50/50 par exemple– quel sera l'effet sur la statistique de photons ?

6. On peut montrer que le nombre de coups N détectés sur un photodétecteur suit également une variable aléatoire, et la variance de cette distribution de probabilité s'écrit :

$$(\Delta N)^2 = \eta^2 (\Delta n)^2 + \eta(1 - \eta)\bar{n} \tag{1}$$

où $\eta = \frac{\bar{N}}{\bar{n}}$ est le rendement quantique du détecteur. Quelles propriétés peut-on en tirer ? Justifier de la difficulté de détecter une lumière quantique.

2 Fonction de corrélation

Une autre façon de caractériser la lumière est d'étudier la fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ définie par

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle \langle I(t+\tau)\rangle} \tag{2}$$

7. Hanbury-Brown et Twiss ont mis au point un interféromètre qui permet de mesurer cette fonction. Soit une source lumineuse qui éclaire une lame séparatrice. On place deux photodétecteurs sur les deux trajets possibles, qui émettent en retour des photo-courants i_1 et i_2. L'un des deux signaux passe dans une ligne à retard, puis les deux sont multipliés et moyennés sur un temps long. Justifier que ce système permet d'obtenir un signal proportionnel à $g^{(2)}(\tau)$.

8. La moyenne étant définie comme $\langle I(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N} I(t_i)$, démontrer que $g^{(2)}(0) \geq 1$. Que dire de $g^{(2)}(\infty)$? de $g^{(2)}(0)$ pour un rayonnement cohérent ? pour un rayonnement dont l'intensité fluctue dans le temps ?
9. Tracer l'allure attendue de $g^{(2)}$ pour deux rayonnements cohérent et chaotique.
10. *Approche quantique :* Exprimer maintenant $g^{(2)}(\tau)$ en termes de nombres de photons reçus n_1 et n_2. Tracer le graphe de la fonction $g^{(2)}(\tau)$ pour une lumière où un photon est émis exactement tous les τ_e.
11. On classifie les rayonnements selon que les photons sont *groupés* ou *dégroupés*. Représenter les fonctions $g^{(2)}$ correspondantes.
12. Si une source émet un train régulier d'impulsions avec exactement deux photons, quelle valeur de $g^{(2)}(0)$ attendez-vous ?