TD 6: Oscillateur harmonique quantique

1 Définitions

1. Donner des exemples physiques faisant intervenir le modèle d'oscillateur harmonique.
2. Rappeler l'énergie classique d'un oscillateur harmonique de masse m en fonction de sa pulsation propre ω. En déduire l'expression du hamiltonien quantique à une dimension en fonction des opérateurs position $\hat{X}$ et impulsion $\hat{P}$.
3. On définit les opérateurs $\tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ et $\tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}P$. Montrer que le hamiltonien s'écrit :
$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\tilde{X}^2 + \tilde{P}^2). \tag{1}$$
Sachant que $[X, P] = i\hbar$, calculer le commutateur $[\tilde{X}, \tilde{P}]$.

2 Opérateurs annihilation et création

On définit les opérateurs

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P}) \qquad \text{et} \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P}) \tag{2}$$

appelés respectivement *opérateur annihilation* et *opérateur création*.

1. Calculer le commutateur $[a, a^\dagger]$.
2. Écrire le hamiltonien H en fonction de ces opérateurs a et $a^\dagger$.
3. On définit un dernier opérateur $N = a^\dagger a$ appelé *opérateur nombre*. Calculer les commutateurs $[N, a]$ et $[N, a^\dagger]$. On pourra utiliser la relation de distribution des commutateurs $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Trouver le spectre du hamiltonien revient à trouver celui de l'opérateur N. On se concentre dans la suite sur ce problème.

3 Spectre de N

Soit λ une valeur propre de N, de vecteur propre associé $|\phi\rangle$.

1. Écrire la valeur propre λ sous la forme de la norme d'un vecteur, et en déduire son signe.
2. En utilisant les commutateurs précédents, montrer que $a|\phi\rangle$ et $a^\dagger|\phi\rangle$ sont aussi des vecteurs propres de N si $\lambda \neq 0$. Donner leur valeur propre respective. Préciser le cas $\lambda = 0$.
3. En déduire que les valeurs propres de N sont des entiers positifs. Justifier les noms des trois opérateurs a, $a^\dagger$ et N.

4 Vecteurs propres de l'hamiltonien

Vus les résultats précédents, on note $n \in \mathbb{N}$ les valeurs propres de N dont on peut montrer par récurrence qu'elles sont non-dégénérées (on associe donc un seul vecteur propre à chaque valeur propre). Dans cette partie, on cherche les états propres $|\phi_n\rangle$ associés.

1. Calculer la fonction propre $\phi_0(x)$ associée à $\lambda = 0$. On pourra utiliser les résultats de la partie précédente.

2. Montrer que $|\phi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^\dagger |\phi_n\rangle$, par exemple en calculant la norme de $|\phi_{n+1}\rangle$. En déduire qu'on peut écrire les états propres normés de N (et donc de $\hat{H}$) sous la forme

$$|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n |\phi_0\rangle \tag{3}$$

On retiendra les effets des opérateurs création et annihilation sur les états propres de N :

$$a\,|\phi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle \qquad \text{et} \qquad a^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle \tag{4}$$

5 États cohérents

Les états propres $|\phi_n\rangle$ sont des états purement quantiques, dans lesquels se trouvent un nombre déterminé d'excitations élémentaires (de *quanta d'énergie*). À l'inverse, on peut justifier que les états les plus fidèles à la mécanique classique sont les états propres de l'opérateur a. Ces états sont appelés *états cohérents*.

1. Chercher un état cohérent $|\alpha\rangle$ de valeur propre α sous la forme d'une superposition d'états propres de $\hat{H}$.
2. Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle_\alpha$, $\langle P\rangle_\alpha$, ainsi que $\langle H\rangle_\alpha$ l'énergie moyenne d'un tel état en fonction de $\hbar\omega$ et α.
3. On montre que $\langle H^2\rangle_\alpha = \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + 1/4)$. En déduire l'étalement en énergie ΔH_α de l'état cohérent. L'état a-t-il une énergie bien déterminée ?
4. Donner l'évolution temporelle de l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. Montrer que celui-ci est toujours vecteur propre de a. Que remarque-t-on ?