

## TD 1 : Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une technique consistant à trouver des relations de proportionnalité entre des grandeurs décrivant un phénomène donné à partir des dimensions de chacun des paramètres. Un de ces théorèmes fondamentaux est le théorème de Vaschy-Buckingham :

**Théorème de Vaschy-Buckingham** (ou théorème Pi) : S'il existe une relation entre  $n$  grandeurs physiques faisant apparaître  $k$  unités différentes, alors on peut trouver  $n - k$  nombres sans dimension indépendants ( $x_i$ ) formés de ces grandeurs vérifiant une loi  $f(x_1, \dots, x_{n-k}) = 0$ .

Si cette méthode ne donne pas de résultats quantitatifs, sa force de prédiction ne doit pas être sous-estimée. Elle est particulièrement utile en mécanique quantique, là où le nombre de grandeurs physiques fondamentales est limité.

### 1 Une nouvelle constante fondamentale

1. On étudie l'atome d'hydrogène en mécanique classique. Montrer qu'on ne peut pas construire d'énergie, de temps ou de longueur caractéristiques à partir des constantes du problème.
2. En ajoutant  $\hbar$  à ces grandeurs, identifier une distance  $a_0$  et une énergie  $E_0$  caractéristiques. Les estimer, et proposer une interprétation pour ces quantités.
3. Que se passe-t-il s'il on rajoute la célérité de la lumière  $c$  à ce lot de grandeurs ? Définir au moins un paramètre adimensionné simple  $\alpha$  et le calculer.

### 2 Une application macroscopique

1. Rappeler la définition du coefficient de tension superficielle  $\gamma$  d'une interface. Donner également la définition de l'enthalpie massique de vaporisation  $L_v$ . Rappeler leur ordre de grandeur pour l'eau (pour l'interface liquide/gaz). Interpréter ces deux grandeurs d'un point de vue microscopique.
2. Par analyse dimensionnelle, proposer des expressions pour  $L_v$  et  $\gamma$  faisant intervenir des unités de la mécanique quantique. Faites-en l'application numérique et commenter.
3. En déduire une relation faisant intervenir  $L_v$ ,  $\gamma$  et  $a_0$  la longueur caractéristique issue de la mécanique quantique. Donner un ordre de grandeur de  $a_0$ . Commenter.
4. Justifier la phrase de V. Weisskopf : *La longueur capillaire est essentiellement la moyenne géométrique entre la hauteur maximale d'une montagne et la distance interatomique.*<sup>1</sup>

Une des conséquences importantes de la mécanique quantique est que les objets peuvent se comporter à la fois comme des ondes et comme des particules ponctuelles, d'où le néologisme « ondulisme » (*wavicules*).

### 3 Comprimer un solide

1. Justifier qu'un électron confiné dans un volume  $V$  ne peut prendre que certaines énergies, et qu'il existe une énergie minimale  $E_{\min}$  pour celui-ci.
2. Si  $N$  électrons sont confinés dans ce même volume, que devient cette énergie minimale ?
3. Définir une pression de confinement  $P_c$  (ou pression de Schrödinger) due à cette énergie. Quel est le signe de  $P_c$  ? Comparer cette équation d'état à celle d'un gaz parfait.
4. Dans un métal, les électrons de conduction peuvent être approximés par un gaz d'électrons libres de se mouvoir dans le solide. Donner un ordre de grandeur de  $P_c$  dans le cas d'un alcalin et la comparer à la pression atmosphérique. Commenter.

---

1. V. Weisskopf, *Search for Simplicity*, American Journal of Physics

5. À quelle grandeur macroscopique est-il cohérent de comparer cette pression de compression ? Étudier le cas d'un alcalin (le lithium par exemple).

#### 4 L'atome d'hydrogène *in a nutshell*

1. Appliquer le raisonnement de la partie précédente pour trouver une expression du rayon de l'atome d'hydrogène stable et de son énergie. Les estimer numériquement.
2. Adapter les réponses précédentes dans le cas du  $n^{\text{e}}$  état excité.

#### Bonus : absorption par un électron libre

Montrer, dans le cadre relativiste, qu'il n'est pas possible qu'un électron libre immobile absorbe un photon.