Arnaud Raoux (arnaud.raoux@sorbonne-universite.fr)
http://www.phys.ens.fr/~raoux/

# TD 2 – Instruments d'optique

## 1 Propriétés optiques du dioptre plan

On considère une surface d'eau (d'indice $n$) plane en $z < 0$ réalisant un dioptre plan avec l'air en $z > 0$. On place un objet dans l'air à une distance $h = OA$ du dioptre et on cherche son image par le dioptre, pour un observateur dans l'eau.

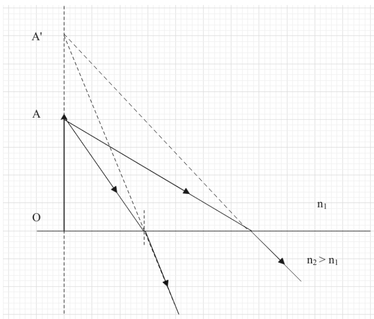
**1.** Un objet situé sur l'axe optique envoie vers la surface des rayons faisant un angle $i$ avec ce dernier ; d'où sembleront-ils provenir après réfraction ?

**2.** Le dioptre plan est-il rigoureusement stigmatique ?

**3.** Montrer qu'un stigmatisme approché est réalisé dans les conditions de Gauss.

**4.** À quelle distance de la surface semble être un oiseau volant à 2 mètres d'altitude ?

*Correction.*




**1.** Soit $I$ le point où arrive le rayon sur le dioptre. Le triangle $OAI$ est rectangle, et $OA = OI \tan\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$. Le rayon est réfracté avec un angle $r$. On prolonge le rayon réfracté du côté de l'air, soit $A'$ le point d'intersection avec l'axe $z$. Le triangle $OA'I$ est rectangle, et $OA' = OI \tan\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$.

**2.** Pour que le dioptre soit rigoureusement stigmatique, il faut que la position de $A'$ ne dépende que de $A$, et pas de l'angle d'incidence $i$. Or :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - r\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \frac{\tan i}{\tan r} = \frac{\tan i}{\tan\left[\operatorname{asin}\left(\frac{1}{n}\sin i\right)\right]} = f(i)$$

Donc le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique.

**3.** Pour de petits angles, on a :

$$\frac{OA'}{OA} \approx \frac{\tan i}{\frac{1}{n}\tan i} = n$$

qui est indépendant de $i$, d'où un stigmatisme approché.

**4.** $OA' = n\,OA = 1{,}33 \times 2\,\mathrm{m} = 2{,}66\,\mathrm{m}$.

## 2 Distance minimale entre objet et image réels

Un objet et un écran sont séparés d'une distance $D$. On place une lentille convergente de distance focale $f'$ pour réaliser l'image de l'objet sur l'écran. Montrer qu'il existe une distance minimale entre l'objet et l'écran pour obtenir une image. En déduire une méthode de mesure de $f'$ (dite *de Silbermann*).

*Correction.*
La distance minimale entre objet et écran est $4f'$ avec $f'$ la distance focale de la lentille. Cette relation se montre avec la relation de Descartes. En effet, soit $x = \overline{AO}$ la distance objet-lentille, et $D = \overline{AA'}$ la distance objet-écran. La relation de conjugaison au centre donne :

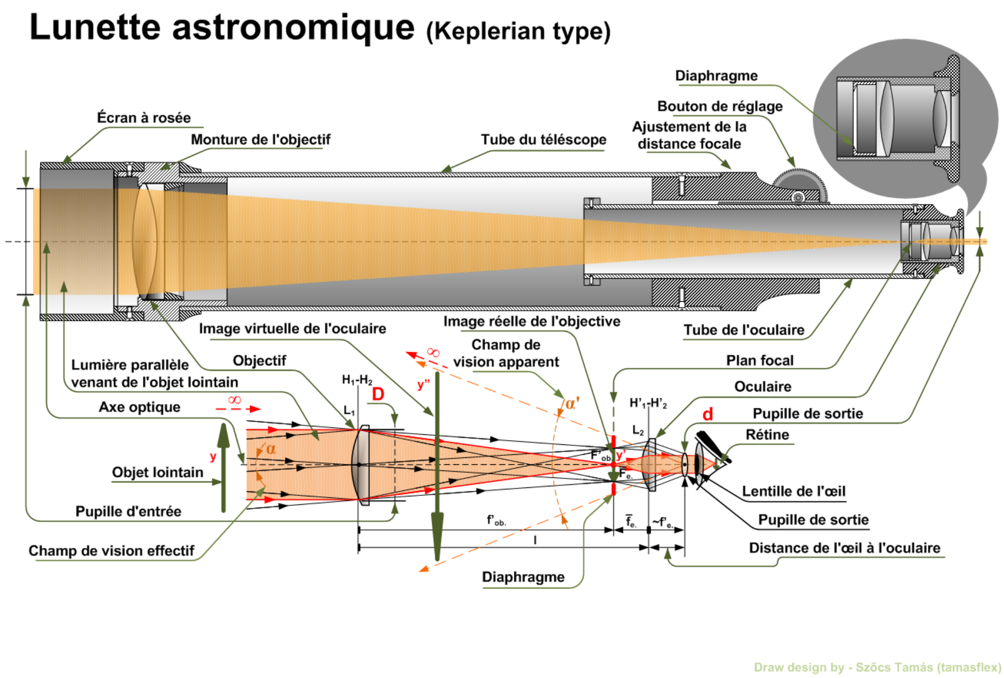
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x}$$

soit éliminant les dénominateurs l'équation $(D-x)x = xf' + (D-x)f'$, qui se simplifie sous la forme : $x^2 - Dx + Df' = 0$. Comme nous voulons des solutions réelles à ce trinôme, le discriminant $\Delta = D^2 - 4Df'$ doit être positif ou nul, ce qui nous donne la relation importante : $\boxed{D \geq 4f'}$.
Si on est dans la situation $D = 4f'$, alors il n'y a qu'une seule position pour la lentille afin d'avoir une image de l'objet sur l'écran. Dans ce cas, $\overline{AO} = 2f'$ et $\overline{OA'} = 2f'$, la lentille est à égale distance de l'écran et l'objet.

## 3 Objectif d'appareil photographique


1. L'appareil photographique est-il un instrument subjectif ou aérien ? Justifier que la grandeur d'échelle pertinente est le grandissement.
2. On modélise l'objectif d'un appareil photo par une lentille convergente de distance focale $f'$. Dessiner et décrire l'image d'un objet réel $AB$ par cette lentille. On supposera l'objet $AB$ situé à une distance supérieure à $2f'$ de la lentille.
3. Exprimer le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ en fonction de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$.
4. Pourquoi cette configuration de lentille est-elle appropriée pour l'appareil photographique ? pour l'œil ?
5. *Profondeur de champ :* On cherche à photographier un paysage, et donc avoir plusieurs éléments à des distances différentes nets sur le capteur. Justifier que cela est possible à condition de modifier l'ouverture de l'appareil photo.
6. Paramètres d'un appareil : Comment les paramètres suivants influencent-ils une image ? Ouverture, temps de pose, distance focale, téléobjectif, mise au point, sensibilité ISO, zoom

# 4 La lunette astronomique de Kepler




Une lunette astronomique est composée d'un objectif et d'un oculaire, que l'on modélisera par deux lentilles convergentes de distances focales $f_{ob}$ et $f_{oc}$. On les dispose de manière à ce que le foyer principal image de l'objectif coïncide avec le foyer principal objet de l'oculaire. Le système est dit *afocal*. Son but est de faire une image à l'infini d'un objet situé à l'infini, « plus grosse » qu'initialement.

1. Représenter les parcours de deux rayons lumineux à travers la lunette astronomique faisant initialement un angle $\theta$ avec l'axe optique dans le cas $f'_{ob} > f'_{oc}$.
2. Justifier que la grandeur d'échelle pertinente est le grossissement $G = \theta'/\theta$, rapport des angles fait par rapport à l'axe optique à la sortie et à l'entrée de la lunette astronomique. Exprimer $G$ en fonction des distances focales dans les conditions de Gauss.
3. On admet qu'à cause de la diffraction, il est impossible de distinguer deux objets de séparation angulaire initiale inférieure à $1,22\lambda/D$, où $D$ est le diamètre de l'objectif. Quelles distances peut-on résoudre sur la lune avec $D \simeq 6$ cm ?
4. À votre avis, quelles sont les autres limites des lunettes astronomiques et par quoi les a-t-on depuis longtemps remplacées en astronomie ?

# 5 Lentilles accolées et aberrations chromatiques

1. Montrer que deux lentilles accolées (dont les centres peuvent être considérés comme confondus) sont équivalentes à une unique lentille dont on précisera la vergence. On exploitera les relations de conjugaison.
2. Expliquer les couleurs observées à la sortie d'une lampe Q-I avec condenseur. On parle d'*aberration chromatique*.
3. En quoi l'utilisation de lentilles accolées avec deux types de verre différents permet de diminuer ce problème ?

*Correction.*

**1.** Soient deux lentilles de centres $O_1$ et $O_2$, et de distances focales $f'_1$ et $f'_2$. L'image $A'B'$ de l'objet $AB$ par la première lentille est l'objet de la seconde lentille, donnant une image finale $A''B''$. En écrivant les deux relations de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2}$$

On se rend compte que si $O_1$ et $O_2$ sont confondus, en soustrayant les deux relations, on obtient à nouveau une relation de Descartes entre l'objet et l'image finale :

$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

**2.** L'indice optique du verre dépendant de la longueur d'onde (par la loi de Cauchy), les différentes longueurs ne sont pas réfractées de la même façon. En particulier, la position des foyers dépend de la longueur d'onde, donc $f'(\lambda)$. Supposons qu'on éclaire la lentille par un objet à l'infini, et on place l'écran au point focal « moyen ». Si on rapproche l'écran de la lentille, on verra une image bleutée. À l'inverse si on l'éloigne l'image sera rougie.

**3.** En utilisant deux lentilles accolées (une convergente et une divergente) dont l'indice varie différemment avec la longueur d'onde. Ainsi, on peut faire en sorte que les foyers de deux longueurs d'onde soient superposés.

## 6 Relation de conjugaison de Newton

On considère une lentille mince de distance focale $f'$.

**1.** Rappeler la formule de conjugaison « usuelle », dite *de Descartes* ou encore *avec origine au sommet*

**2.** Monter qu'elle peut aussi s'écrire comme $\overline{FA}\,\overline{F'A'} = -f'^2$. Il s'agit de la *formule de conjugaison avec origine aux foyers* (ou *de Newton*)

**3.** Dessiner l'image par une lentille convergente d'un objet (situé pour plus de facilité à une distance comprise entre $f'$ et $2f'$ du centre de la lentille) et retrouver ce résultat géométriquement.

*Correction.*
Dans la relation avec origine au sommet, on insère les foyers $F$ et $F'$ :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'} + \overline{F'A'}} - \frac{1}{\overline{OF} + \overline{FA}}$$

soit en éliminant les fractions et en remplaçant $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}$ :

$$f'(-f' + \overline{FA} - f'(f' + \overline{F'A'}) = (f' + \overline{F'A'})(-f' + \overline{FA})$$

qui se simplifie en la relation de Newton : $\overline{FAF'A'} = -f'^2$.

## 7 Propriétés des foyers secondaires

On appelle *plan focal objet/image* le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par les foyers principaux correspondants. Un point de ce plan qui n'est pas le foyer principal est un *foyer secondaire objet/image.*

**4.** Dessiner l'image par une lentille convergente d'un objet $AB$ placé dans son plan focal objet : quelle propriété ont les rayons issus d'un foyer secondaire objet ?

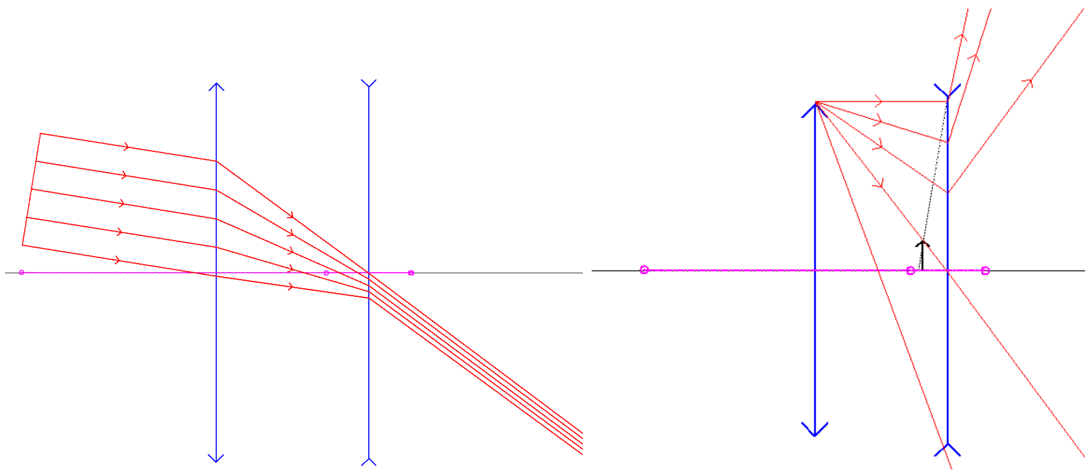
5. Dessiner les rayons menant à un objet $AB$ placé dans son plan focal image : quelle propriété ont les rayons passant par un foyer secondaire image ?

> *Correction.*
> Tous les rayons issus d'un foyer secondaires incidents sur la lentille, ressortent de la lentille parallèle les uns aux autres. Si le foyer est le foyer principal, ceux-ci sont de plus parallèles à l'axe optique.
> De façon symétrique, tous les rayons qui convergent sur un foyer secondaire du plan focal image étaient des rayons incidents parallèles entre eux.

## 8 La lunette astronomique de Galilée

Historiquement, les premières lunettes astronomiques développées se composent de l'association d'une lentille convergente (*l'objectif*) et d'une lentille divergente (*l'oculaire*). Les foyers principaux image de l'objectif et objet de l'oculaire sont confondus, comme dans le cas de la lunette de Kepler.

1. Représenter les parcours de deux rayons lumineux à travers la lunette astronomique faisant initialement un angle $\theta$ avec l'axe optique.
2. Calculer le grossissement $G = \theta'/\theta$ en fonction des distances focale dans les conditions de Gauss : quelle est la différence avec la lunette de Kepler ?
3. En commentant le faisceau de rayons sortant, déterminer le défaut majeur d'une lunette de Galilée.

> *Correction.*
>
> 
>
> Comme pour la lunette de Kepler, on trouve que le grossissement est donné par :
>
> $$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{oc}}}$$
>
> Dans le cas de la lunette de Galilée, $f'_{\text{oc}} < 0$, donc le grossissement est positif : l'image est droite et non retournée comme dans la lunette de Kepler.
> Le souci principal de la lunette de Galilée est que l'image de l'objectif (le cercle oculaire) est en amont de la lentille divergente : cf. image de droite. Cela signifie que la lumière diverge très vite, et que le champ sera fortement limité par l'œil.

## 9 Loupe et lentille divergente

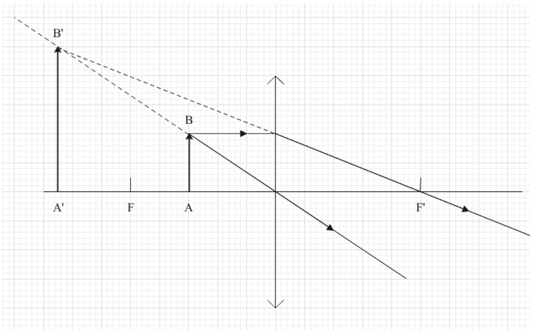
1. Dessiner et décrire l'image par une lentille convergente d'un objet réel situé à une distance inférieure à $f'$, où $f'$ est la distance focale de la lentille.
2. Même question dans le cas d'une lentille divergente.

3. Justifier à l'aide de ces résultats le protocole donné dans *Optique* de S.Houard (page 99) pour déterminer rapidement le caractère convergent/divergent d'une lentille :

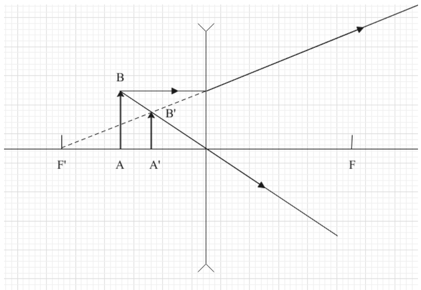
*Prenez une lentille (ou un verre de lunettes) et placez la juste au-dessus d'un objet posé sur une table. Regardez l'image de ce dernier à travers elle, puis imprimez un léger mouvement à la lentille. Observez alors comment se déplace corrélativement l'image et l'objet :*

- *si l'image de l'objet se déplace dans le même sens que la lentille, celle-ci est divergente. S'il s'agit de verres correcteurs, la personne qui les porte est myope ;*
- *si l'image de l'objet se déplace dans le sens opposé à celui de la lentille, celle-ci est convergente. S'il s'agit de verres correcteurs, la personne qui les porte est presbyte ou hypermétrope.*

*Correction.*




Lentille convergente




Lentille divergente

En effet :

- Dans le cas de la lentille convergente, si on rapproche la loupe de l'œil, l'objet se rapproche de $F$. Donc les rayons ressortent de plus en plus parallèles, donc l'image virtuelle paraît de plus en plus loin de la lentille. Plus elle s'éloigne, plus elle grossit.
- À l'inverse pour la lentille divergente, comme l'image est toujours entre $F'$ et la lentille, si on déplace la lentille vers l'œil, l'image fera de même. La taille ne changera quasiment pas.